

guide du dessinateur

les concentrations de contraintes

par
J.-P. Faurie
Ingénieur CESTI
P. Monnier
Ingénieur ENIS
A. Niku-Lari
Docteur-Ingénieur
(Université Paris VI)
Avec la participation de :
R. Sutterlin †
Ingénieur Général de l'Armement



AVANT PROPOS

L'IDÉE que les contraintes dans une pièce ne sont pas seulement liées à sa section nette mais aussi à sa forme n'est pas neuve. Elle est née au début du siècle, avec le désir de certains constructeurs d'alléger leurs produits pour des raisons technologiques.

Des études ont été menées, expérimentales d'abord, théoriques ensuite, plus ou moins exhaustives suivant le but poursuivi. De grands noms comme Peterson et Frocht se sont attachés à faire progresser les connaissances dans ce domaine. Aucun, cependant, n'a égalé Heinz Neuber, Professeur à l'Université de Munich qui, dès 1937, publiait une synthèse théorique, encore de nos jours l'une des sources des résultats les plus sûres. Il existe maintenant un grand nombre de travaux, utilisant surtout la photoélasticimétrie, issus d'une multitude de laboratoires et qui couvrent la plupart des cas morphologiques rencontrés dans les bureaux d'étude.

A l'échelon mondial, les déficits en matières premières, la concurrence de plus en plus sévère et l'exigence de performances de plus en plus élevées imposent d'affiner de plus en plus le calcul des pièces et des structures. Les bureaux d'études souhaitent par ailleurs disposer de méthodes de calcul simple, d'utilisation immédiate. Le CETIM a donc été conduit à rédiger cet ouvrage pratique qui permet, compte tenu des concentrations de contraintes de choisir les formes des pièces les plus couramment rencontrées en mécanique.

Ce guide se propose de satisfaire ce besoin. Ses auteurs l'ont voulu :

- **simple** : il pourra être utilisé par n'importe quel dessinateur quel que soit son niveau,
- **pragmatique** : en indiquant chaque fois que cela est possible, les solutions les plus adéquates.

Les réactions de nos lecteurs, que nous souhaitons nombreuses et précises nous diront si nous avons atteint ce but.

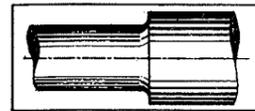
TABLE DES MATIÈRES

GÉNÉRALITÉS

1. Rappel de quelques définitions	9
2. Rupture d'une pièce	10
3. Sollicitations composées	11
4. Comparaison entre pièces de révolution et pièces plates soumises à différents cas de charge	12

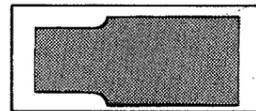
DÉTERMINATION PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE CONTRAINTES

Comment utiliser ce guide ?	15
-----------------------------------	----



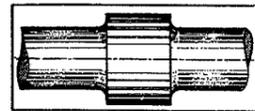
Arbre épaulé :

— traction	17
— flexion	19
— torsion	21



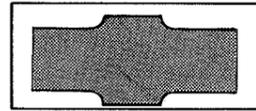
Plaque épaulée :

— traction	51
— flexion	53



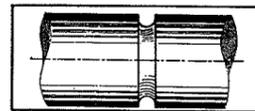
Arbre à deux épaulements :

— tous cas de charge ...	23
--------------------------	----



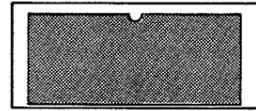
Plaque à deux épaulements :

— tous cas de charge ...	55
--------------------------	----



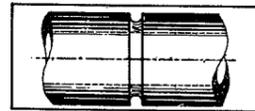
Arbre avec gorge à fond semi-circulaire :

— traction	25
— flexion	27
— torsion	29



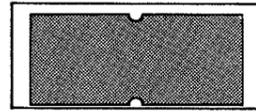
Plaque avec une entaille à fond semi-circulaire :

— traction	57
— flexion	59



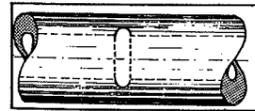
Arbre creux avec gorge extérieure à fond semi-circulaire :

— traction	31
— flexion	33
— torsion	35



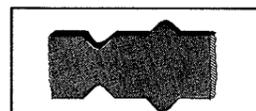
Plaque avec deux entailles à fond semi-circulaire :

— traction	61
— flexion	63



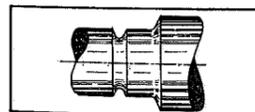
Arbre creux avec gorge intérieure à fond semi-circulaire :

— traction	37
— flexion	39
— torsion	41



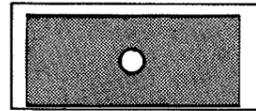
Épaulements et entailles à bords inclinés :

— tous cas de charge ...	65
--------------------------	----



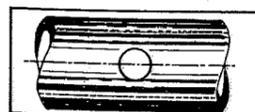
Épaulements et gorges à bords inclinés :

— tous cas de charge ...	43
--------------------------	----



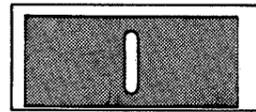
Plaque percée d'un seul trou :

— traction	67
— flexion	69



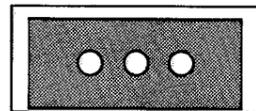
Arbre creux avec trou transversal :

— traction	45
— flexion	47
— torsion	49



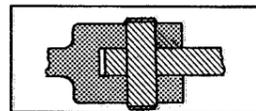
Plaque avec lumière :

— traction	71
— flexion	73



Plaque percée de plusieurs trous :

— traction	75
------------------	----



Chape :

— traction	77
------------------	----

BIBLIOGRAPHIE	78
---------------------	----

GÉNÉRALITÉS

1. RAPPEL DE QUELQUES DÉFINITIONS

1.1. Contrainte

Une contrainte est le rapport d'une force par la surface sur laquelle elle s'exerce.

Elle est dite **normale** si la force est perpendiculaire à la surface (fig. 1 a). C'est le cas des sollicitations en traction-compression et flexion.

C'est une contrainte **tangentielle** ou de cisaillement quand la force et la surface sont parallèles (fig. 1 b). C'est le cas des sollicitations en torsion.

On distingue trois types d'entailles :

- a) métallurgique,
- b) mécanique (dessins),
- c) de service (se formant durant l'utilisation).

L'habitude a été prise d'utiliser le mot « entaille » pour désigner les entailles du type b, c'est-à-dire les discontinuités qui apparaissent sur le dessin de la pièce.

L'effet d'une entaille sur une pièce est la création de concentrations de contraintes locales. Les schémas ci-dessous illustrent ce phénomène (fig. 2).

Dans une pièce non entaillée, la répartition des contraintes se représente par des droites et résulte de l'application des formules classiques de résistance des matériaux ; on a affaire dans ce cas à des contraintes **nominales**. Dans le cas de la flexion et de la torsion, la contrainte nominale est maximale en A et B.

Dans une pièce entaillée, cette répartition est déformée par le phénomène de concentrations de contraintes. On parle alors de contraintes **réelles**. Dans le cas de la figure 2, les contraintes réelles sont également maximales en A et B. Cependant, il existe certains cas morphologiques où les contraintes nominales maximales et réelles maximales ne sont pas au même point ; ils seront signalés individuellement.

Pour ne pas alourdir la terminologie, on désignera par :

- σ_{nom} la contrainte nominale maximale.
- $\sigma_{réelle}$ la contrainte réelle maximale.

La section minimale n'est donc pas le seul élément de calcul ; il faut tenir compte également de facteurs morphologiques qui peuvent avoir une très grande influence. Le but de ce guide est de chiffrer cette influence au moyen de coefficients dits de concentration de contraintes.

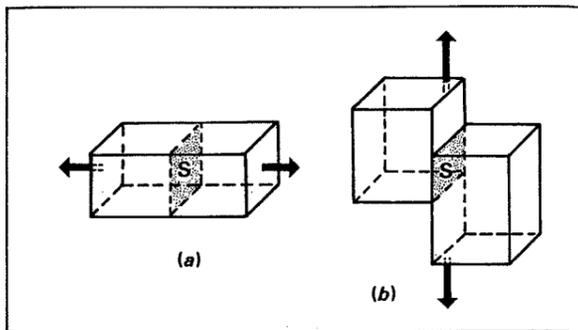


FIG. 1

1.2. Entaille

Le terme « entaille » est utilisé pour désigner, soit une discontinuité imposée ou accidentelle dans la forme du matériau, soit une non homogénéité.

FIG. 2

Pièce	Traction	Flexion	Torsion

1.3. Facteurs caractéristiques de l'effet d'entaille

a) Facteur théorique de concentration de contraintes K_t

K_t est défini comme le rapport de la contrainte maximale réelle à fond d'entaille à la contrainte nominale maximale dans la section nette :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

σ_{\max} est calculable par éléments finis ou mesurable par photoélasticimétrie.

σ_{nom} est calculable à l'aide des formules de résistance des matériaux.

Traction/compression	Flexion	Torsion
$\sigma_{\text{nom}} = \frac{F}{S}$	$\sigma_{\text{nom}} = \frac{M}{I}$	$\tau_{\text{nom}} = \frac{M_t}{I_o}$
F = effort de traction ou de compression S = section M = moment de flexion I = moment d'inertie par rapport à l'axe neutre M_t = moment de torsion I_o = moment d'inertie polaire V = distance de la fibre considérée à l'axe neutre.		

Le facteur théorique de concentration de contrainte K_t est un paramètre qui dépend uniquement de la géométrie de la pièce. Cela suppose que la pièce est constituée par un matériau homogène et continu. Les valeurs de K_t données dans ce guide ne concernent pas les défauts tels que coups d'outils, inclusions, soufflures ou fissures internes (notamment dans les structures soudées qui font l'objet de spécifications particulières).

b) Facteur de réduction de la résistance à la fatigue K_f

Par définition, la limite de fatigue d'une pièce σ_D est la valeur de la sollicitation alternée en-dessous de laquelle un métal peut supporter un nombre illimité de cycles. Dans certains cas, cette limite n'existe pas; une valeur conventionnelle est alors adoptée.

K_f est défini comme le rapport de la limite de fatigue d'un échantillon lisse σ_D à la limite de fatigue de l'échantillon possédant des foyers de concentration de contraintes σ'_D :

$$K_f = \frac{\sigma_D}{\sigma'_D}$$

K est donc un coefficient expérimental déterminé à partir d'essais de fatigue réalisés sur la pièce même et dans les conditions de fonctionnement de celle-ci. C'est un facteur effectif de concentrations de contraintes. Très généralement, on constate que $1 < K_f < K_t$; on est donc tenté de penser qu'en fatigue, K_t donnant une valeur par excès

de K_f , K_t pourrait lui être substitué en apportant une marge de sécurité supplémentaire. Il n'en est rien, car la limite de fatigue d'une pièce dépend largement de son état de surface (rugosité), de ses dimensions (effet d'échelle) et de la structure du matériau. Sa détermination exige donc la connaissance d'un certain nombre de données que l'on ne trouve que dans des ouvrages spécialisés.

c) Remarque importante

Nous donnons dans cet ouvrage la valeur de K_t pour des pièces planes ou de révolution en fonction d'un certain nombre de paramètres dimensionnels et de particularités (entaille, congé, trou, etc.) en partant de données théoriques et expérimentales; les sources sont rappelées en référence renvoyant à la bibliographie donnée en fin d'ouvrage.

Le coefficient K_t permet de calculer des contraintes en vue de comparer des formes et dimensions de pièces mécaniques. Dans tous les tableaux réunis dans ce guide, il ne sera question que de ce coefficient. Soulignons qu'il ne s'applique que si :

- 1°. la charge est statique
- 2°. la contrainte réelle maximale est toujours inférieure à la limite d'élasticité.

2. RUPTURE D'UNE PIÈCE

Considérons une pièce prismatique entaillée soumise à un effort de traction croissant :

- pour des efforts moyens ou faibles, les contraintes ne dépassent pas la limite d'élasticité, même en tenant compte de la morphologie de la pièce. La répartition est alors du type de celle représentée figure 3a.
- si l'effort de traction augmente, la contrainte maximale atteint la limite d'élasticité dans la zone de l'entaille, ce qui se traduit par une plastification partielle. La répartition des contraintes est donnée figure 3b. Si le niveau d'effort augmente encore, une amorce de rupture apparaît dans la zone plastifiée provoquant la destruction de la pièce.

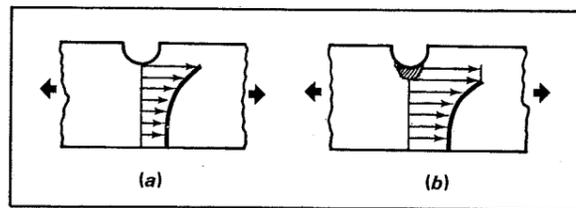


FIG. 3

Il est donc inexact de dire que la pièce est hors d'usage lorsque la limite d'élasticité est dépassée en un point. La rupture dépendra en fait de la forme de la pièce, de la nature du matériau et du mode de sollicitation. Cette plastification est même utilisée pour renforcer la résistance de certaines pièces (cas des boulons précontraints).

Les coefficients de concentration de contrainte ne doivent donc pas être utilisés pour déterminer avec exactitude l'effort qui provoque la rupture d'une pièce mais pour comparer deux formes entre elles.

3. SOLLICITATIONS COMPOSÉES

Considérons un arbre soumis à trois sollicitations simultanées : un effort de traction $\vec{P} = 3\,000$ daN, un effort de flexion $\vec{M} = 50$ m.daN et un moment de torsion $\vec{M}_t = 100$ m.daN. Chacune de ces sollicitations engendre des contraintes qui, dans un premier temps, peuvent être évaluées séparément.

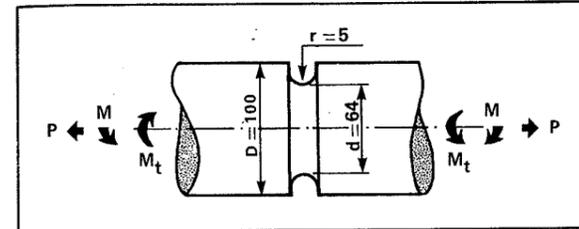


FIG. 4

a) Traction

Sous un effort de traction pure, la contrainte nominale est uniforme et vaut :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

soit ici : $\sigma_{\text{nom}} = 0,93$ daN/mm².

Le graphique de la page 25 donne un coefficient de concentration de contraintes $K_t = 2,8$, d'où :

$$\sigma_{\text{réelle}} = 2,6$$
 daN/mm²

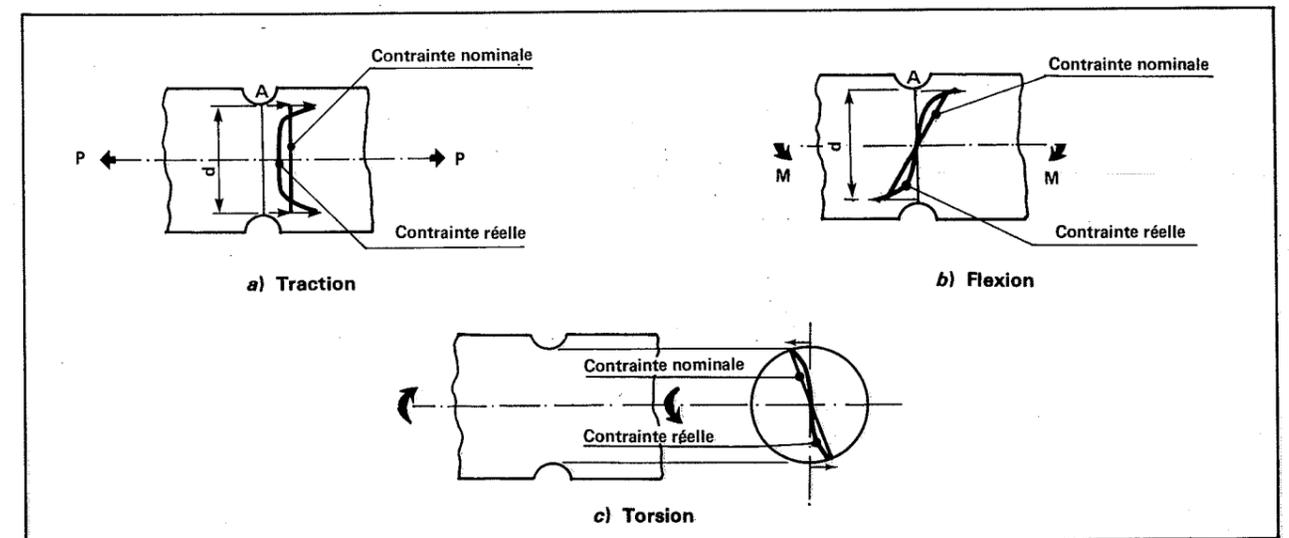
b) Flexion

Sous le moment de flexion M , les contraintes nominales se répartissent proportionnellement à leur distance à l'axe neutre (trait fin). La contrainte nominale maximale vaut :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

soit ici : $\sigma_{\text{nom}} = 1,94$ daN/mm².

FIG. 5. — Répartitions des contraintes réelles et nominales.



Le graphique de la page 27 donne un coefficient de concentration de contraintes $K_t = 2,2$, d'où :

$$\sigma_{\text{réelle}} = 4,3$$
 daN/mm²

Les contraintes de traction et de flexion sont coaxiales. Elles peuvent donc s'additionner ou se retrancher. En ne considérant que ces deux sollicitations, la contrainte réelle est donc maximale en A et vaut :

$$\sigma_{\text{réelle}} = 6,9$$
 daN/mm²

c) Torsion

Les contraintes de cisaillement engendrées par le couple de torsion sont perpendiculaires aux deux autres. Leur répartition est représentée figure 29. La contrainte nominale maximale est donnée par :

$$\tau_{\text{nom}} = \frac{16M_t}{M d^3}$$

soit ici : $\tau_{\text{nom}} = 1,94$ daN/mm².

Le graphique de la page 28 donne $K_t = 1,6$, d'où :

$$\tau_{\text{réelle}} = 3,1$$
 daN/mm²

d) Composition des contraintes

Les contraintes ne se composent pas comme des forces, mais d'après des critères plus complexes. On utilise habituellement le critère de Von Mises qui permet de calculer une contrainte équivalente (nous nous limitons au cas le plus simple où une traction (ou compression) agit en même temps qu'un cisaillement).

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Cette contrainte est à comparer à la limite d'élasticité du matériau.

Pour l'exemple étudié :

$$\sigma_M = \sqrt{6,9^2 + 3 \times 3,1^2}$$

$$\sigma_M = 8,7$$
 daN/mm²

Pour plus de détails, on se reportera à un ouvrage traitant de la résistance des matériaux.

4. COMPARAISON ENTRE PIÈCES DE RÉVOLUTION ET PIÈCES PLATES SOUMISES A DIFFÉRENTS CAS DE CHARGE

Le graphique de la figure 6 représente la variation du coefficient de concentration de contraintes en fonction des paramètres d/D et r/t (ce dernier en coordonnées logarithmiques) dans les cas morphologiques et de charge suivants :

- plaque épaulée en flexion
- plaque épaulée en traction
- arbre épaulé en traction
- arbre épaulé en flexion
- arbre épaulé en torsion.

Il a été tracé à partir des formules utilisées dans les pages 17, 19, 21, 51 et 53 avec les notations habituelles.

On constate que :

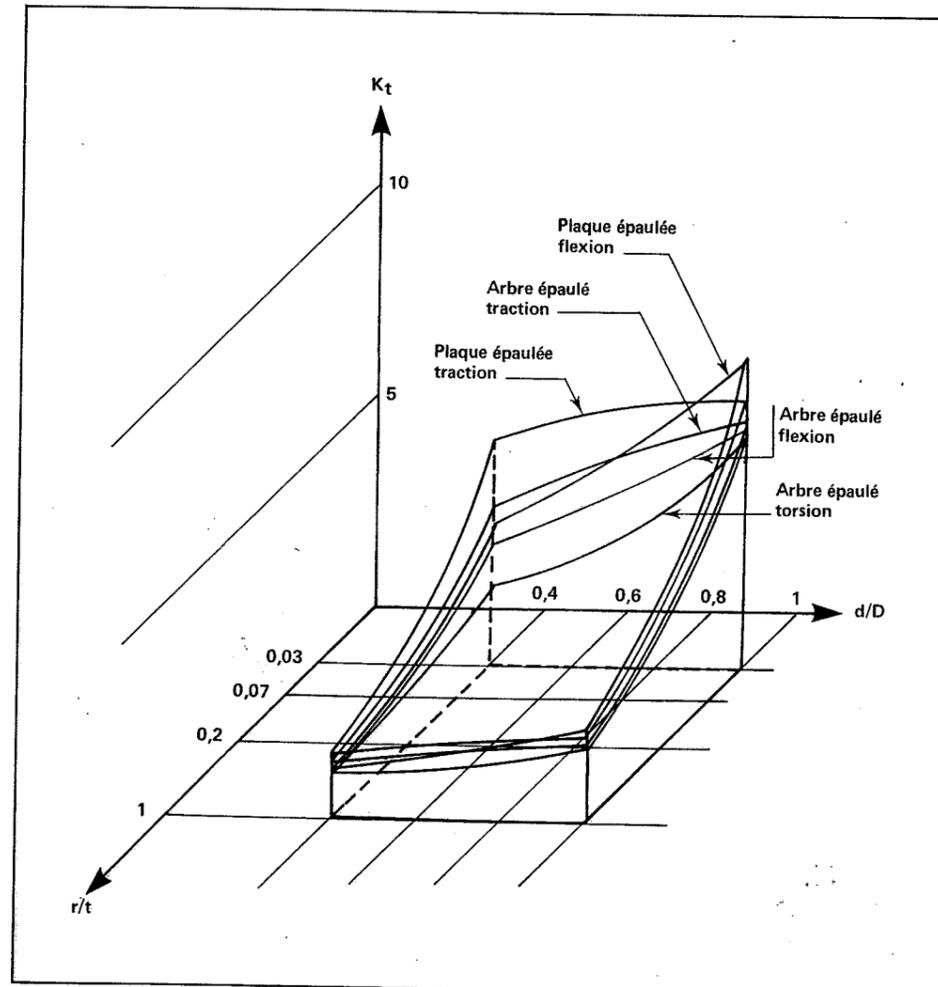
- quel que soit le cas envisagé, le coefficient de concentration augmente quand d/D augmente et r/t diminue.
- en règle générale, les coefficients les plus forts sont obtenus en traction, puis en flexion, enfin en torsion,
- en première approximation un résultat bi-dimensionnel (plaques) peut être extrapolé à un cas tri-dimensionnel (arbre).

Ces quelques remarques, utilisées avec toute la prudence nécessaire, permettront, dans certains cas, d'estimer les coefficients de concentration de contraintes de cas non traités.

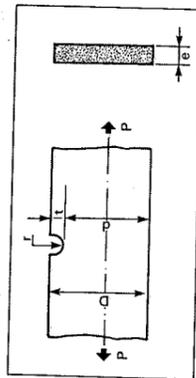
DÉTERMINATION PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES

- Pièces de révolution : arbres.
- Pièces plates : plaques.
- Cas de charges : traction, flexion, torsion.

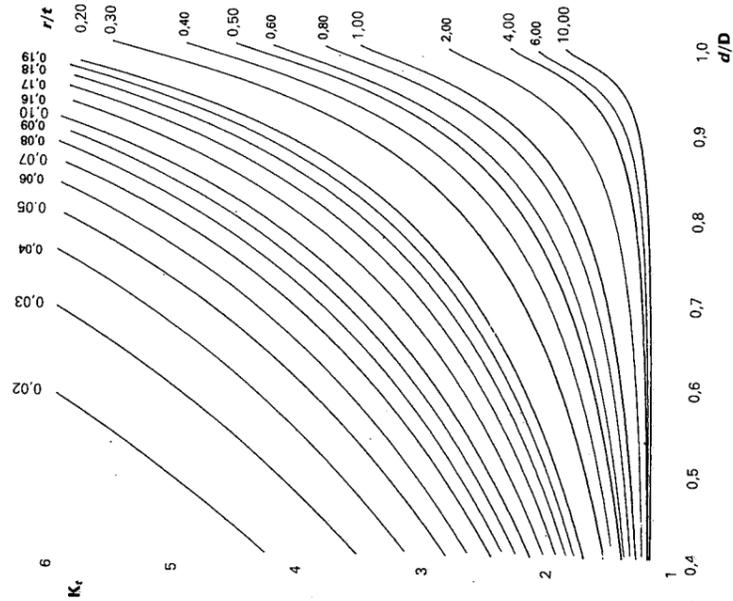
FIG. 6



Plaque avec une entaille à fond semi-circulaire



$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e \cdot d}$$



56

TRACTION PLAQUE AVEC UNE ENTAILLE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

FORMULES (d'après [1], [2], [3])

$$K_t = 1.2 \sqrt{\frac{(b-r)^2}{(a-r)^2 + (b-r)^2} + 1}$$

$$q_1 = 1 + 2 \sqrt{\frac{r}{D}}; \quad q_2 = \frac{q_1 - 2c}{1 - c/D}$$

$$c = \frac{q_1 - A}{4A - 1}; \quad A = \sqrt{\frac{D}{r} + 1} + \sqrt{\frac{r}{D} + 1}$$

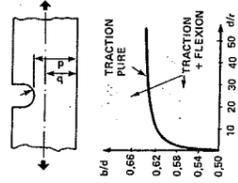
$$q_1 = \frac{2A^2 \sqrt{D^2 - 1}}{D^2 \text{Arctg} \sqrt{D^2 - 1} + \sqrt{D^2 - 1}}$$

$$q_2 = \frac{3 \sqrt{D^2 - 1} + (D^2 - 2) \text{Arctg} \sqrt{D^2 - 1}}{4(D^2 - 1)^{3/2}}$$

Remarque. — Le graphique donné ci-contre n'est valable que pour le cas de traction pure ce qui suppose une position bien déterminée de l'axe d'application de l'effort. Ne pas calculer cette position en tenant compte des concentrations de contraintes. Elle s'exprime par la formule :

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{\sqrt{\frac{d}{r} + 1} \text{Arctg} \sqrt{\frac{d}{r} + 1} + \sqrt{\frac{d}{r}}}{\sqrt{\frac{d}{r} + 1} \text{Arctg} \sqrt{\frac{d}{r} + 1} + \sqrt{\frac{d}{r}}}$$

En représentant $\frac{\Delta}{d}$ en fonction de $\frac{d}{r}$, on obtient le graphique ci-dessous :

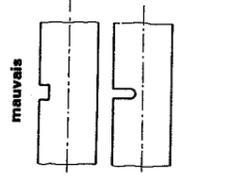


Positionner l'axe de l'effort au milieu de la section nette est donc une approximation. Elle est cependant parfaitement admissible.

EXEMPLE D'APPLICATION

$\frac{d}{D} = \frac{80}{100} = 0.8$
 $\frac{r}{D-d} = \frac{5}{100-80} = 0.25$
 $\sigma_{nom} = \frac{P}{e \cdot d} = \frac{2000}{10 \times 80} = 2.5 \text{ daN/mm}^2$
 $\sigma_{max} = K_t \times \sigma_{nom} = 3 \times 2.5 = 7.5 \text{ daN/mm}^2$

CONSEILS PRATIQUES



57

COMMENT UTILISER CE GUIDE ?

Nous avons voulu par une division rationnelle et une présentation claire de cet ouvrage rendre sa lecture aussi facile que possible.

Le guide étant ouvert aux pages correspondant au cas de figure et au type de sollicitation choisis, on trouve :

page de gauche :

- un croquis d'identification,
- une formule simple donnant la contrainte nominale,
- un abaque permettant de déterminer K_t ;

page de droite :

- l'énoncé des formules qui ont servi au tracé de l'abaque,
- un (ou deux) exemple d'application,
- éventuellement des conseils pratiques pour le dessinateur,
- des remarques éventuelles facilitant l'utilisation du graphique.

• Contrainte nominale

Cette contrainte est calculée à partir de la section nette de la pièce et des formules classiques de résistance des matériaux, sans tenir compte des concentrations de contraintes ; par exemple, dans le cas de figure donné ci-dessous, on a :

$$\sigma_{nom} = \frac{6 Mb}{(\beta^3 - b^3)e}$$

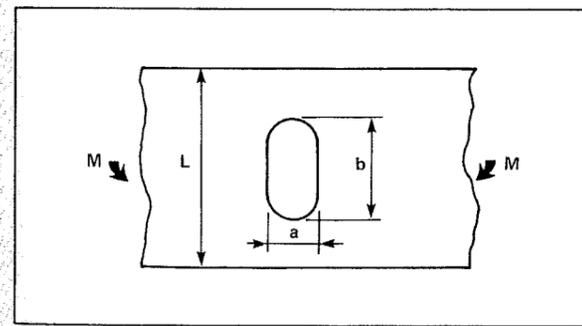


FIG. 7

Cependant, dans certains cas, dont celui de la figure ci-dessus, on substitue à cette contrainte, celle qui se rapporte à la section brute, soit :

$$\sigma_{nom}^{(b)} = \frac{6 Mb}{\beta^3 e}$$

Les calculs sont alors plus simples.

Le coefficient de concentration de contraintes correspondant a été baptisé $K_t^{(b)}$, afin qu'il ne soit pas confondu avec le coefficient K_t , utilisé ordinairement, et l'on a :

$$\sigma_{réelle} = \sigma_{nom}^{(b)} \times K_t^{(b)}$$

Le cas général reste néanmoins celui où est utilisée la contrainte nominale de la section nette.

• Abaques

Quelle que soit la méthode employée, la valeur du coefficient de concentration de contraintes ne peut pas être déterminée avec précision. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, la notion de concentration de contraintes n'est pas toujours en corrélation étroite avec la notion de rupture de pièce. Il serait donc illusoire de vouloir déterminer graphiquement une valeur de K_t avec une grande précision.

Toutes les courbes se limitent à une valeur supérieure de K_t égale à 6. Au-delà, la détermination du coefficient de concentration de contraintes est trop imprécise. De toute façon nous conseillons au lecteur de revoir le dessin de la pièce lorsque la concentration de contraintes est trop importante.

• Formules

Le passage systématique par une formulation mathématique offre plusieurs avantages :

- possibilité de tracer une courbe pour n'importe quelle valeur de paramètre,
- possibilité de choisir automatiquement l'échelle la mieux adaptée à une lecture claire,
- possibilité d'introduire dans l'avenir d'autres résultats expérimentaux.

Ces formules sont issues soit d'ouvrages cités en référence, soit de résultats obtenus au CETIM. Les coefficients ont presque tous été obtenus au CETIM par régression.

Il nous a paru intéressant de donner ces formules étant donné le développement actuel des calculateurs de bureaux. Ces formules ont été programmées au CETIM :

- en Fortran IV pour tracé sur ordinateur,
- sur un type de calculateur de bureau.

• Exemple

Nous donnons un exemple numérique de chaque cas morphologique. Souvent, le calcul est évident. Dans quelques cas particuliers, cependant, il facilitera la détermination des contraintes.

• Conseils pratiques

Les conseils donnés dans ce guide se limitent en général à quelques croquis. Nous avons voulu montrer qu'il était presque toujours possible de trouver une solution permettant de réduire les concentrations de contraintes.

Nous avons conscience cependant, de n'apporter que quelques solutions parmi toutes les solutions possibles et comptons sur l'imagination du lecteur pour découvrir les autres.

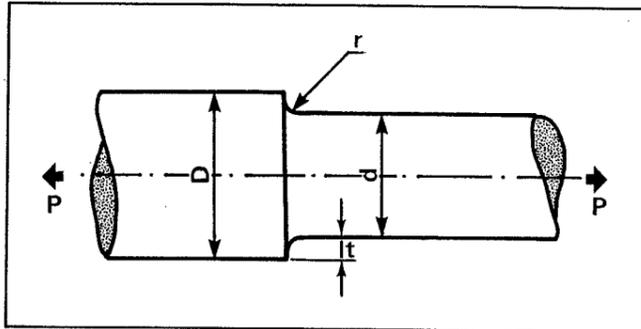
• Remarques

Les remarques qui figurent au bas de la page de droite ont deux buts :

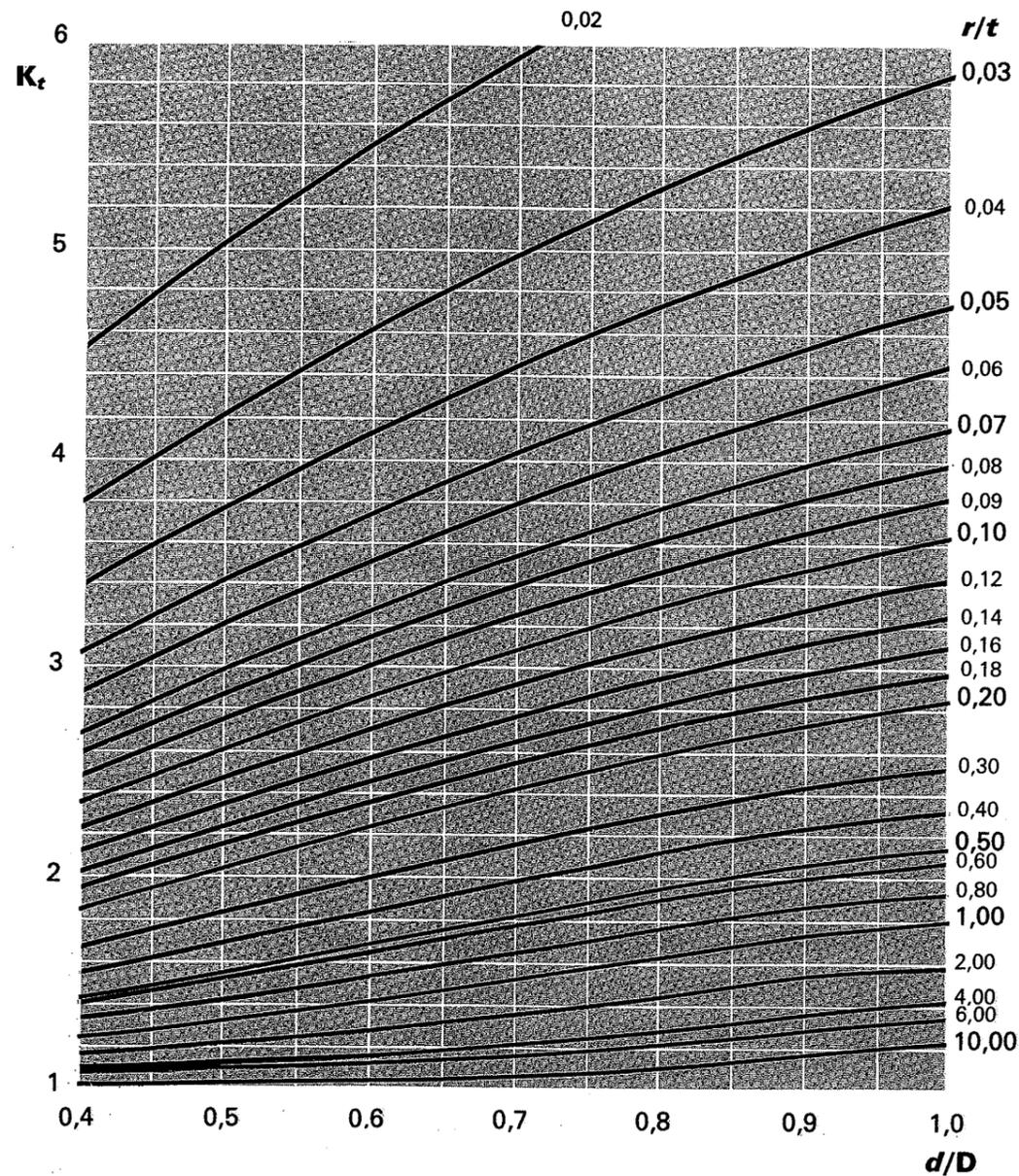
- expliquer une notation particulière du graphique comme $K_t^{(b)}$
- souligner une particularité physique du cas envisagé comme le déplacement du point de contrainte maximale dans certains cas de flexion.

Elles s'inscrivent donc dans le cadre d'une classification et d'une meilleure compréhension du guide.

Arbre épaulé



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4 P}{\pi d^2}$$



TRACTION

ARBRE ÉPAULÉ

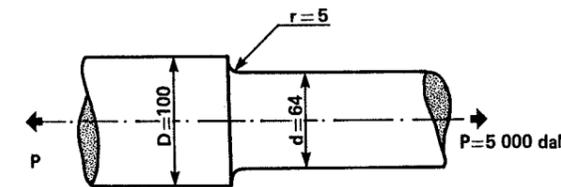
FORMULES (d'après [4], [6], [19])

$$K_r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,88 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,843 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{t}{r} \times \frac{d}{D-d} + 1} - 1$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{2r}{D-d} = \frac{10}{100-64} = 0,278$$

$$K_r = 2,1$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4 \times 5\,000}{\pi \times 64^2} = 1,55 \text{ daN/mm}^2$$

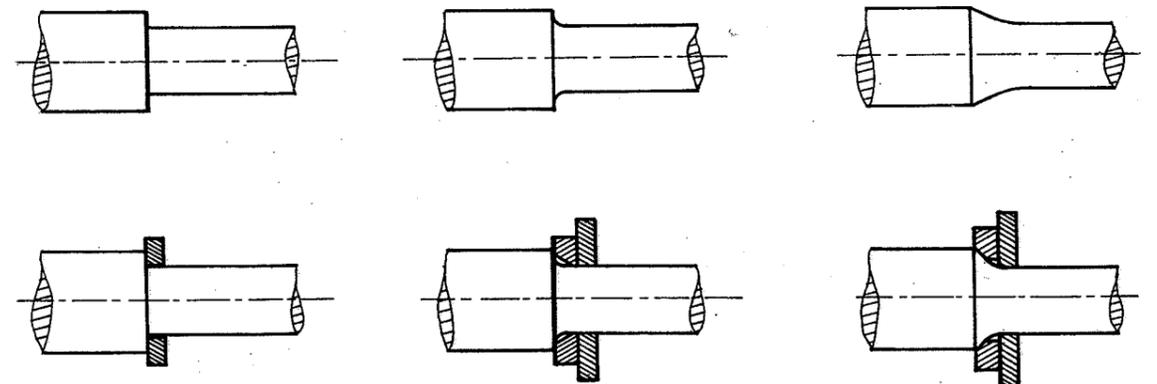
$$\sigma_{\text{réelle}} = 2,1 \times 1,55 = 3,26 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES

mauvais

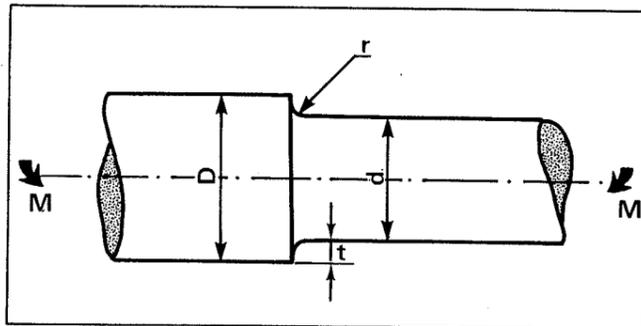
acceptable

bon

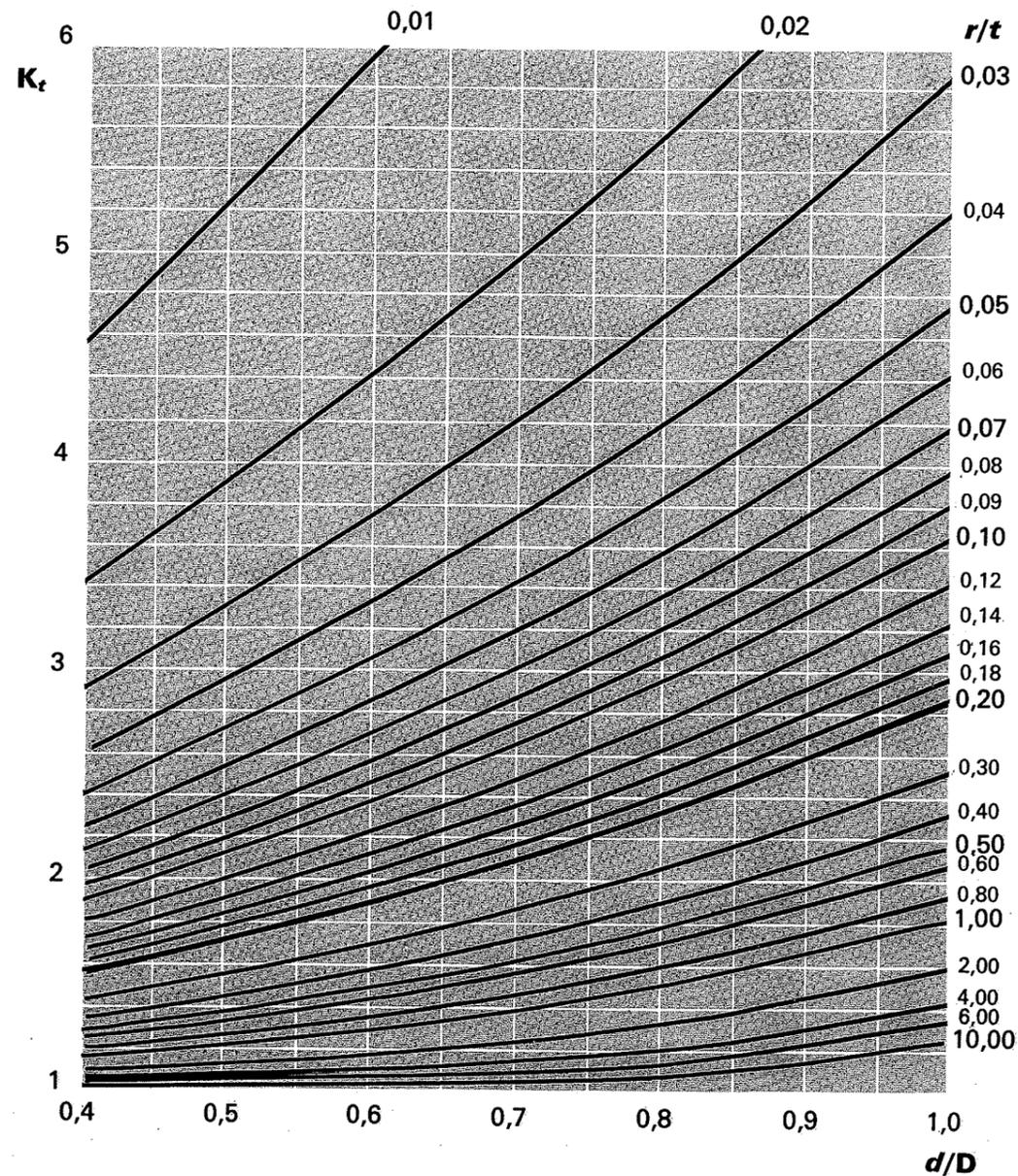


Il vaut mieux un arrondi moyen bien exécuté qu'un arrondi plus grand avec des « escaliers ».

Arbre épaulé



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32 M}{\pi d^3}$$



FLEXION

ARBRE ÉPAULÉ

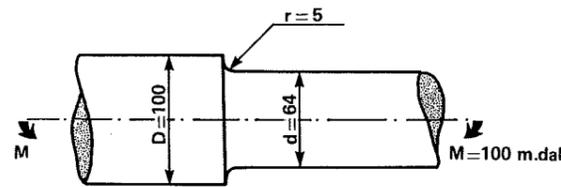
FORMULES (d'après [3], [11], [22])

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,541 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,843 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{t}{r} \times \frac{d}{D} + 1 - 1}$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



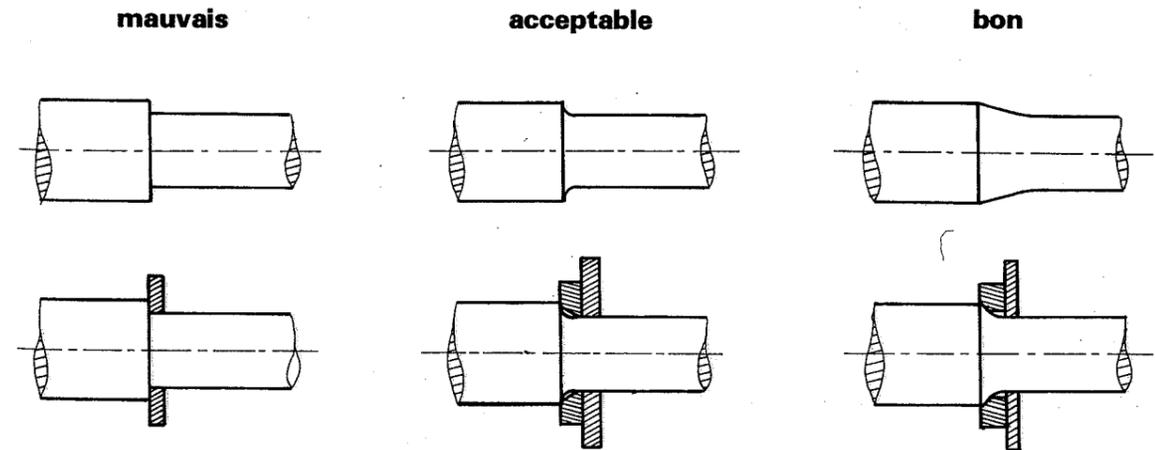
$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100}$$

$$\frac{r}{t} = \frac{2r}{D-d} = \frac{10}{100-64} = 0,278 \quad \left. \vphantom{\frac{r}{t}} \right\} K_t = 1,8$$

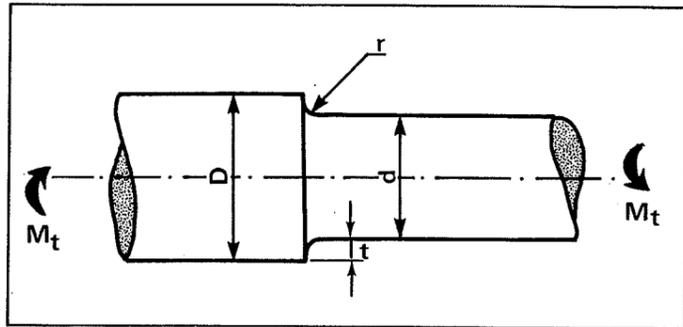
$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32 \times 10^6}{\pi \times 64^3} = 3,9 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = 1,8 \times 3,9 = 7 \text{ daN/mm}^2$$

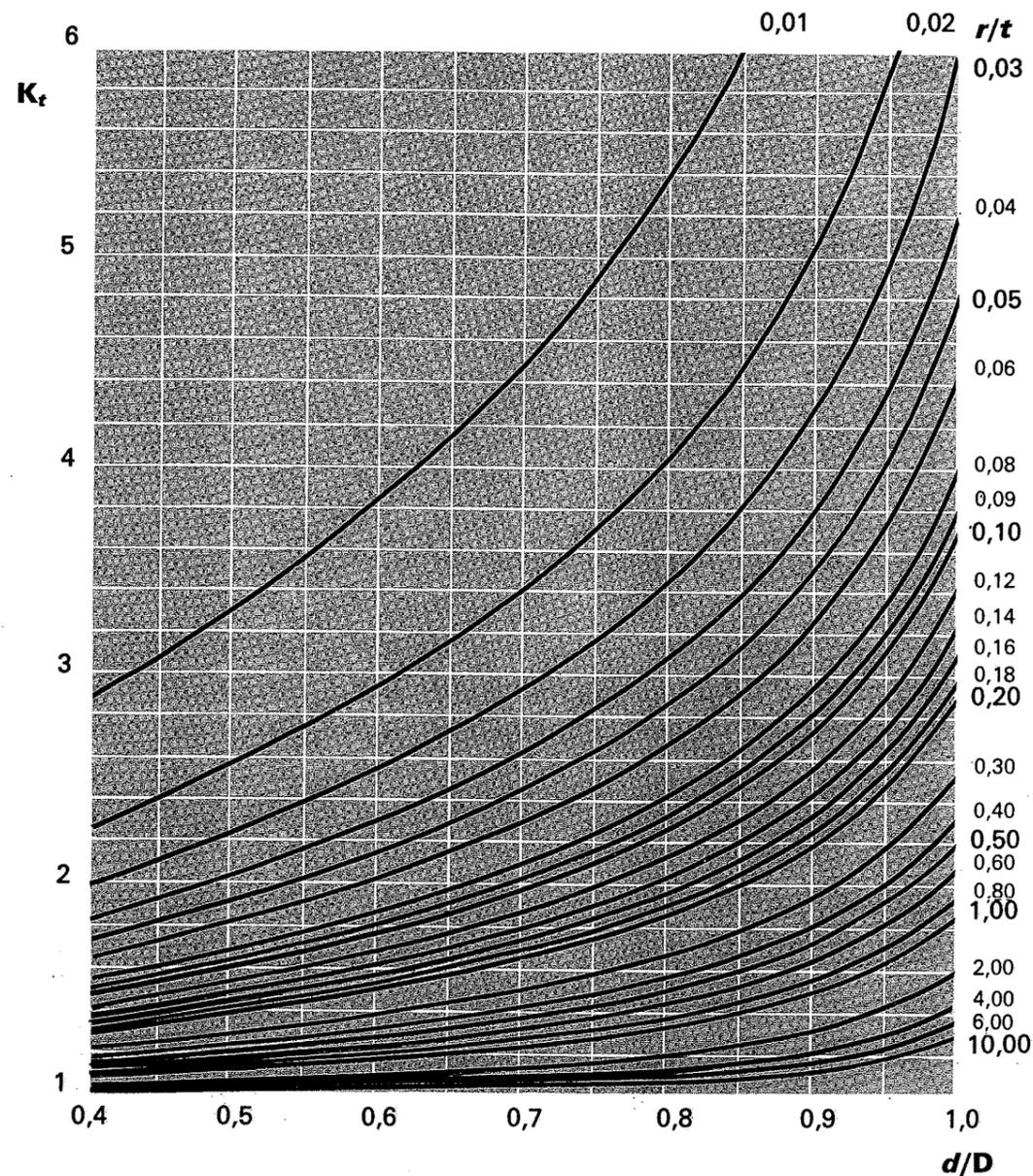
CONSEILS PRATIQUES



Arbre épaulé



$$\tau_{\text{nom}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$



TORSION

ARBRE ÉPAULÉ

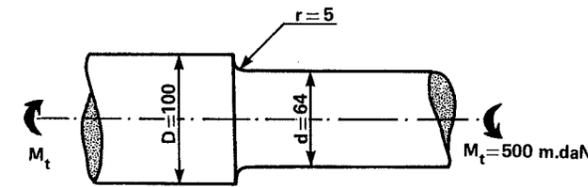
FORMULES (d'après [5], [19])

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,263 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,843 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{t}{r} \times \frac{d}{D} + 1} - 1$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{2r}{D-d} = \frac{10}{100-64} = 0,278$$

$$K_t = 1,4$$

$$\tau_{\text{nom}} = \frac{16 \times 5 \times 10^5}{\pi \times 64^3} = 9,7 \text{ daN/mm}^2$$

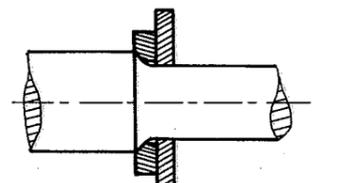
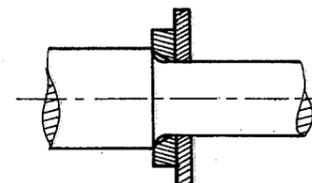
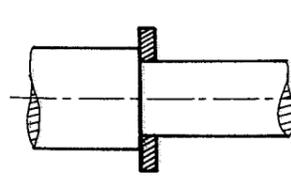
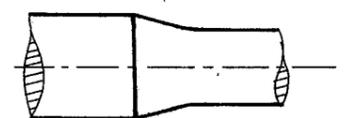
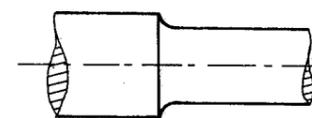
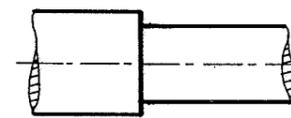
$$\tau_{\text{réelle}} = 1,4 \times 9,7 = 13,6 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES

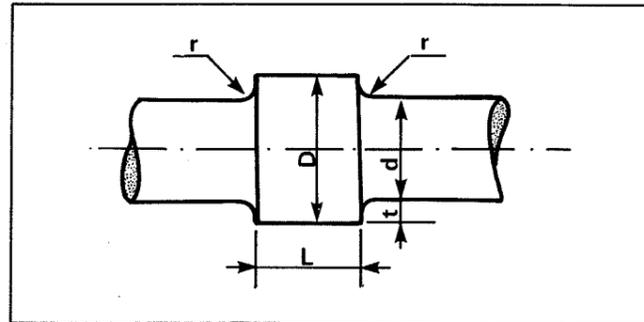
mauvais

acceptable

bon



Arbre à deux épaulements



1. Deux épaulements éloignés : $L > 2d$

Les épaulements n'ont pas d'influence l'un sur l'autre. Se reporter pour le calcul de chacun d'eux aux graphiques correspondant au cas de l'épaulement simple (p. 16 traction, p. 18 flexion et p. 20 torsion).

2. Deux épaulements rapprochés : $L < 2d$

On détermine K_r comme dans le cas d'un simple épaulement, mais on remplace D par un diamètre équivalent $D_{\text{éq}}$ donné par :

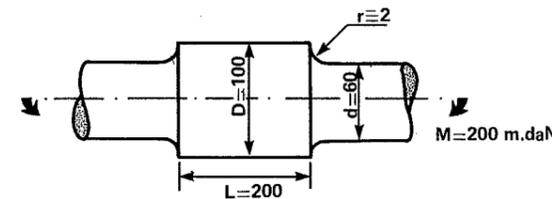
$$D_{\text{éq}} = d + 0,3 L$$

TOUS CAS DE CHARGE

ARBRE A DEUX ÉPAULEMENTS

EXEMPLES D'APPLICATIONS

1° $L > 2d$



$$\frac{d}{D} = \frac{60}{100} = 0,6$$

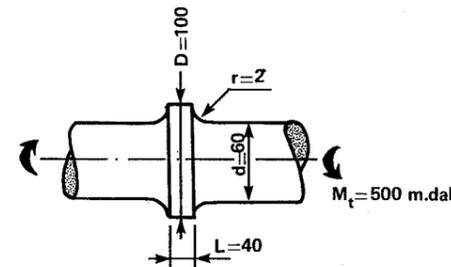
$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{2}{20} = 0,1$$

$$K_r = 2,4 \text{ (graphique p. 18)}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32 M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 2 \times 10^5}{\pi \times 60^3} = 9,4 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r \times \sigma_{\text{nom}} = 2,4 \times 9,4 = 22,6 \text{ daN/mm}^2$$

2° $L < 2d$



$$D_{\text{éq}} = d + 0,3 L = 60 + 0,3 \times 40 = 72$$

$$\frac{d}{D_{\text{éq}}} = \frac{60}{72} = 0,83$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D_{\text{éq}} - d}{2}} = \frac{2}{6} = 0,33$$

$$K_r = 1,7 \text{ (graphique p. 20)}$$

$$\tau_{\text{nom}} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \times 5 \times 10^5}{\pi \times 60^3} = 11,8 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau_{\text{réelle}} = K_r \times \tau_{\text{nom}} = 1,7 \times 11,8 = 20,1 \text{ daN/mm}^2$$

Remarques

La formule utilisée, $D_{\text{éq}} = d + 0,3 L$, est très approchée. De plus, elle ne fait pas intervenir la valeur de « D » ce qui physiquement est choquant. Elle a le mérite d'être très simple et d'avoir été éprouvée par de nombreux bureaux d'étude.

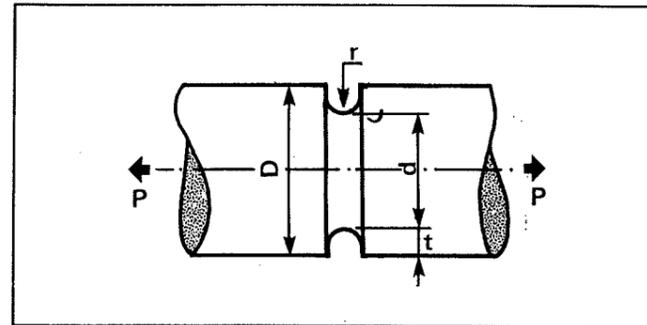


Le grand diamètre d'un double épaulement a une influence sur le coefficient de concentration de contrainte. Celui-ci augmente quand « D » augmente. Cependant, au-delà d'une certaine valeur qui dépend de la longueur « L », K_r devient constant. Le métal supplémentaire ne participe pas à la résistance de la pièce.

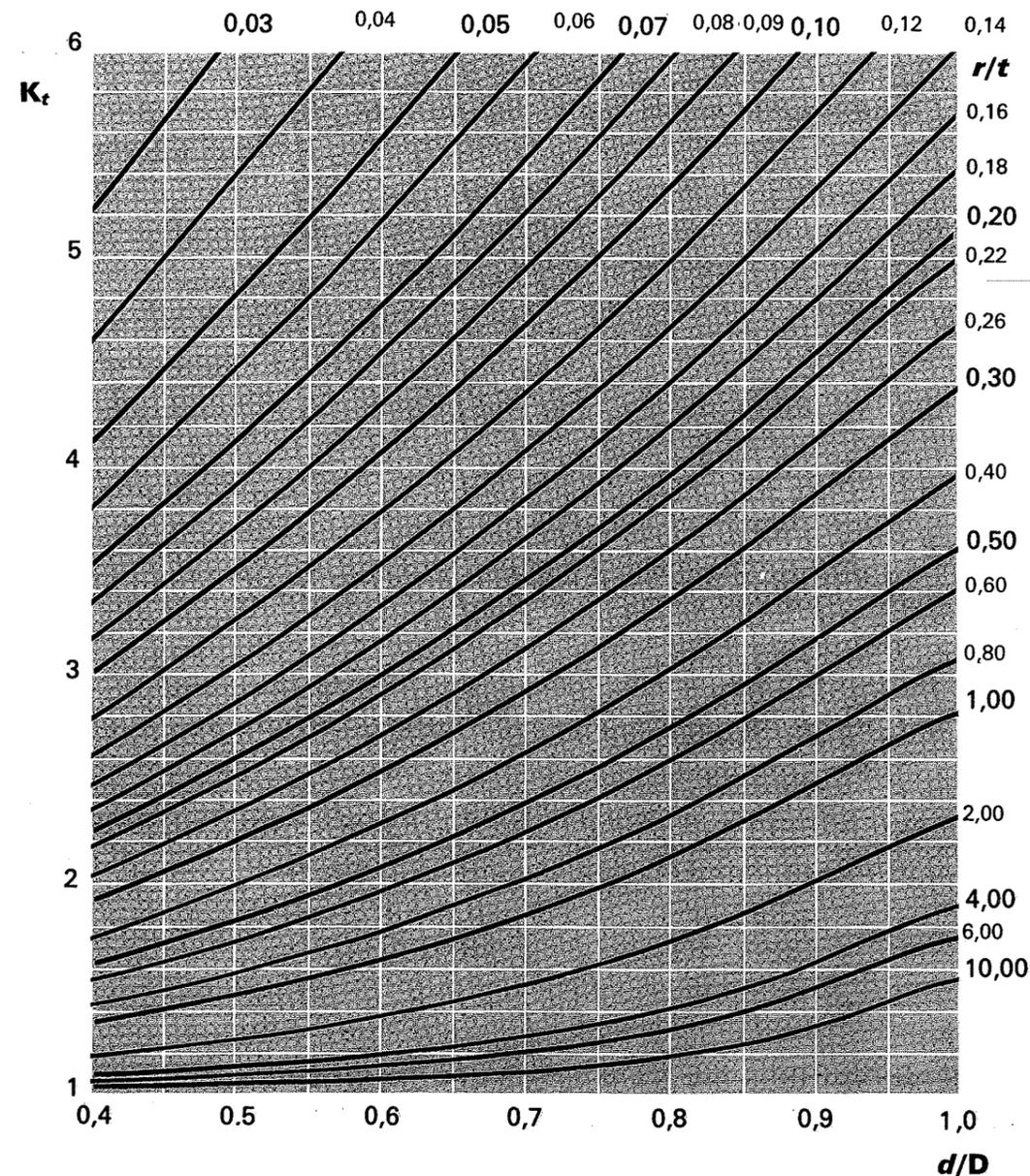


On peut envisager de la même façon l'influence de la longueur de l'épaulement. Le coefficient de concentration de contrainte augmente quand la longueur « L » augmente jusqu'au moment où les deux épaulements n'ont plus d'influence l'un sur l'autre.

Arbre avec gorge à fond semi-circulaire

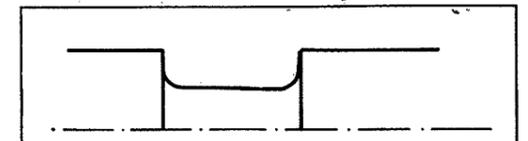


$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi d^2}$$



TRACTION

ARBRE AVEC GORGE À FOND SEMI-CIRCULAIRE*



(*) La gorge à fond semi-circulaire est un cas particulier de la gorge à fond plat (fig. ci-dessus). Le cas général, pour lequel aucune donnée n'existe, fait actuellement l'objet d'une étude expérimentale au CETIM.

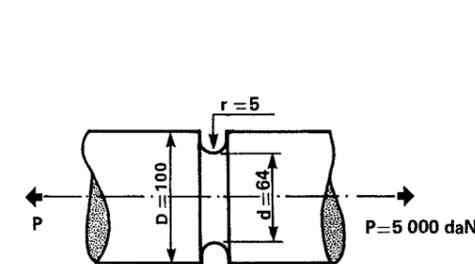
FORMULES (d'après [1], [2], [5])

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1,197 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{1,871 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{\frac{d}{D}}{\frac{t}{r} \times \frac{D}{1 - \frac{d}{D}} + 1} - 1}$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



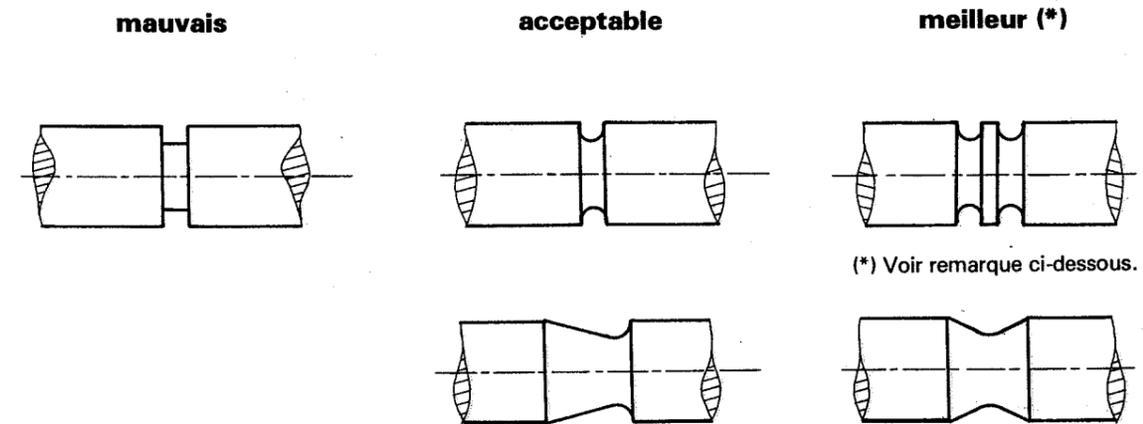
$$\frac{d}{D} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{5}{18} \quad \left. \vphantom{\frac{r}{t}} \right\} K_t = 2,8$$

$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 5000}{\pi \times 64^2} = 1,55 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,8 \times 1,55 \approx 4,3 \text{ daN/mm}^2$$

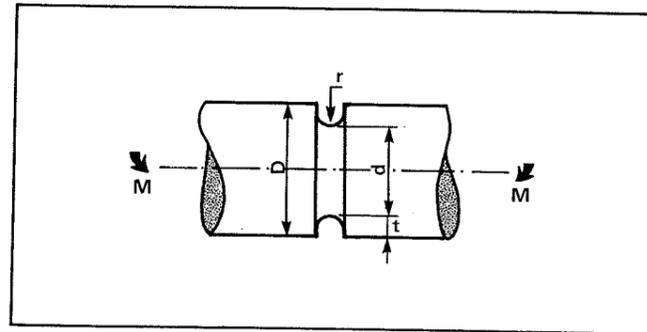
CONSEILS PRATIQUES



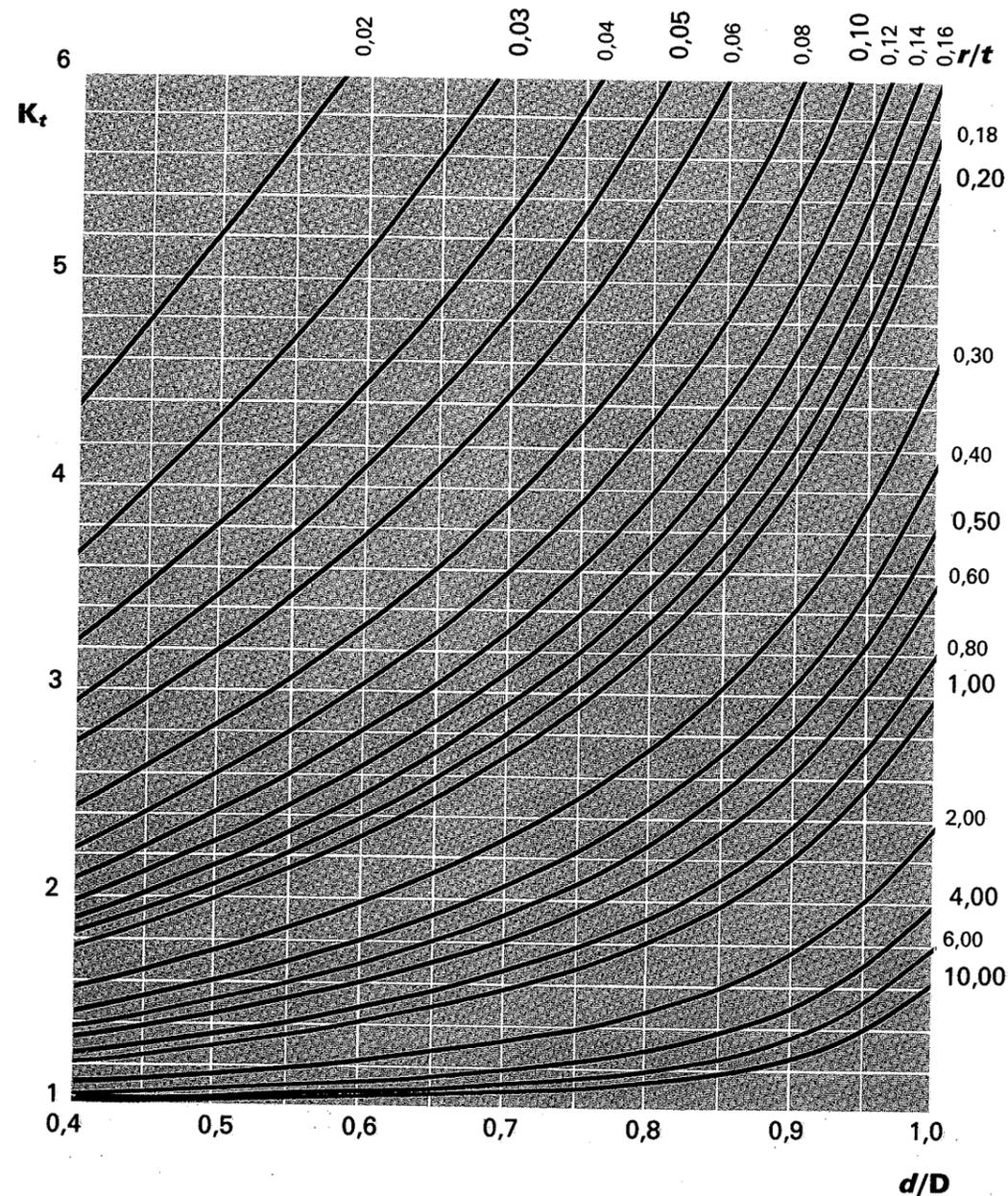
(*) Voir remarque ci-dessous.

(*) Une bonne méthode pour diminuer les concentrations de contraintes dues à une gorge est d'en mettre une autre à côté (principe des gorges à décharge).

Arbre avec gorge à fond semi-circulaire



$$\sigma_{nom} = \frac{32 M}{\pi d^3}$$



FLEXION

ARBRE AVEC GORGE À FOND SEMI-CIRCULAIRE

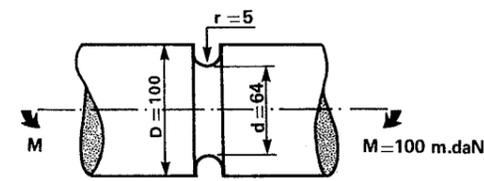
FORMULES (d'après [1], [2], [5])

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,715 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{\frac{d}{D}}{\frac{t}{r} \times \frac{D}{1 - \frac{d}{D}} + 1} - 1}$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{D - d} = \frac{5}{18} = 0,278$$

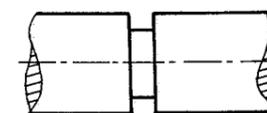
$$K_t = 2,2$$

$$\sigma_{nom} = \frac{32 M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 10^5}{\pi \times 64^3} \approx 3,9 \text{ daN/mm}^2$$

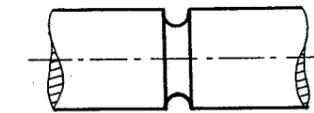
$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,2 \times 3,9 \approx 8,6 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES

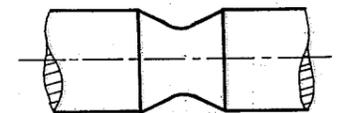
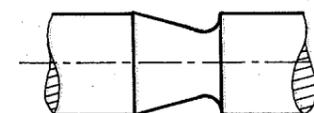
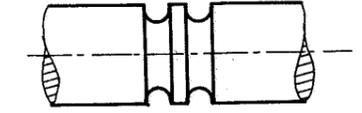
mauvais



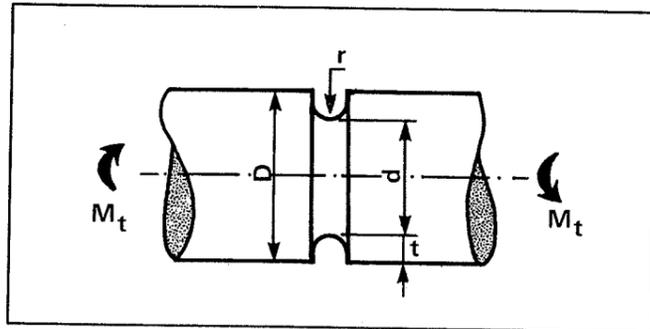
acceptable



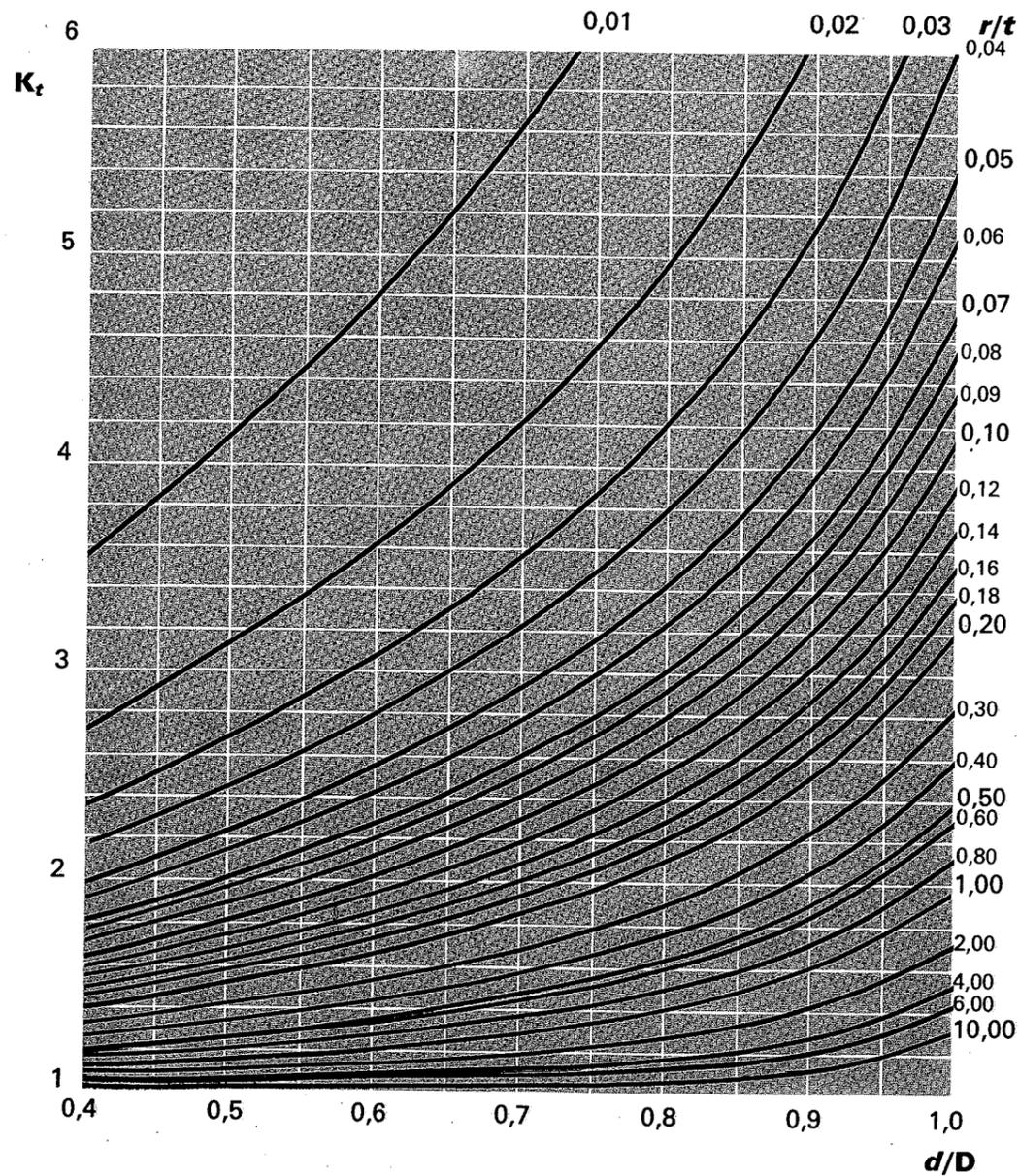
meilleur



Arbre avec gorge à fond semi-circulaire



$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$



TORSION

ARBRE AVEC GORGE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

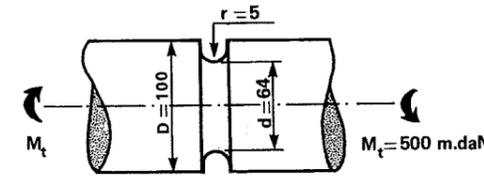
FORMULES (d'après [1], [23])

$$K_r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,365 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{\frac{d}{D}}{1 - \frac{d}{D}} + 1} - 1$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{5}{18} = 0,278$$

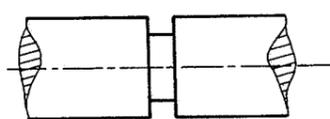
$$K_r = 1,6$$

$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \times 5 \times 10^5}{\pi \times 64^3} = 9,7 \text{ daN/mm}^2$$

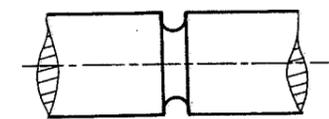
$$\tau_{réelle} = K_r \times \tau_{nom} = 1,6 \times 9,7 \approx 15,5 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES

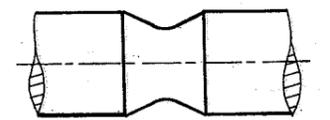
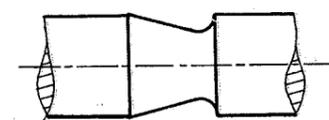
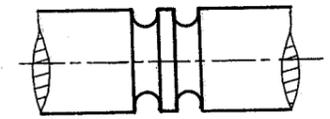
mauvais



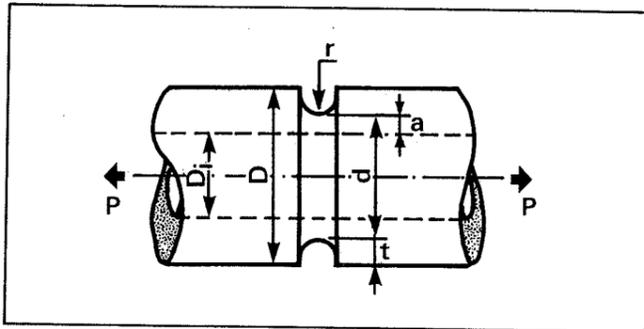
acceptable



meilleur



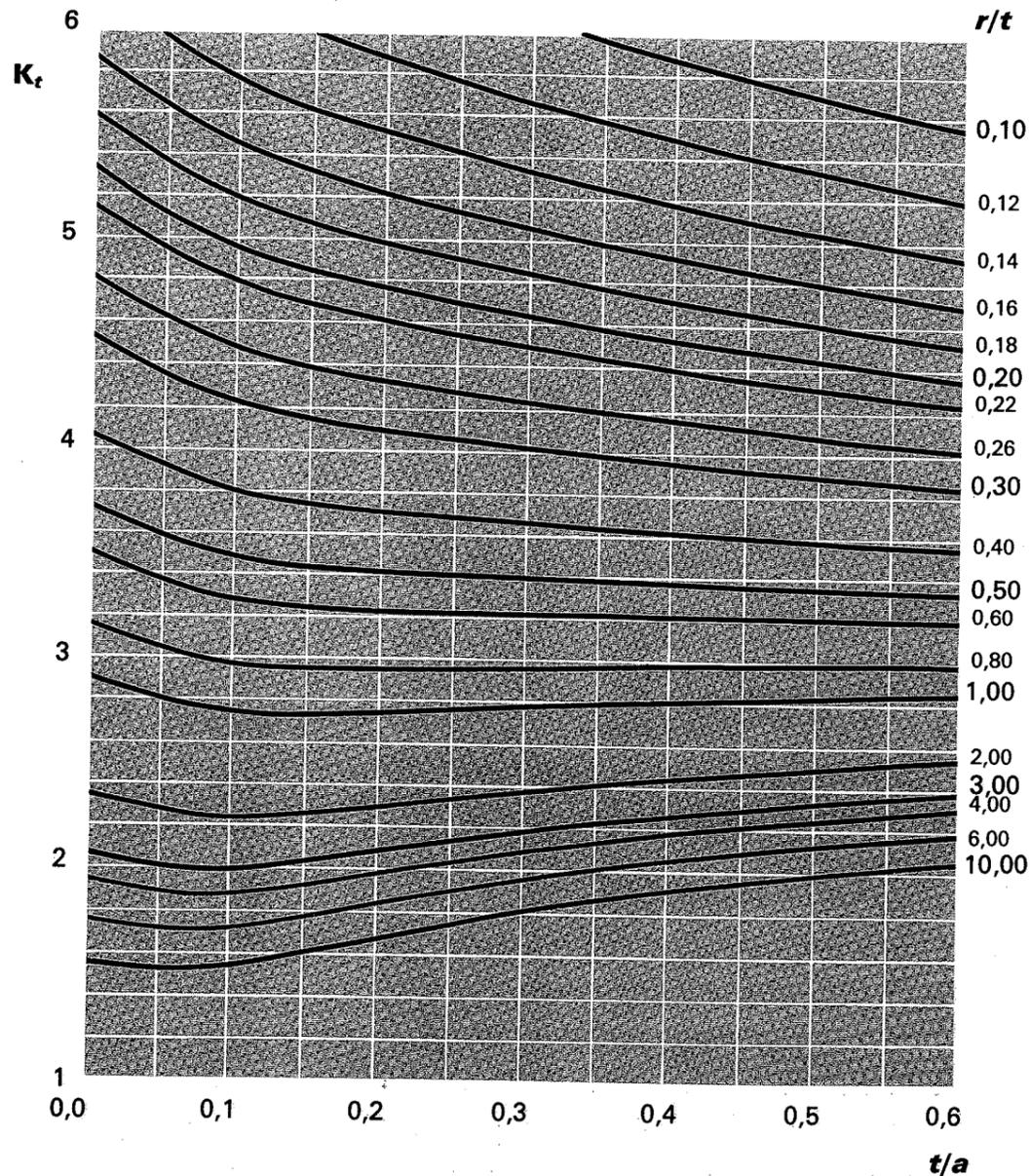
Arbre creux avec gorge extérieure à fond semi-circulaire



Cette fiche se rapporte au cas où $\frac{d}{t} > 20$.

Si $\frac{d}{t} < 20$, cf. p. 24.

$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi(d^2 - D_i^2)}$$



ARBRE CREUX AVEC GORGE EXTÉRIEURE À FOND SEMI-CIRCULAIRE

1^{er} cas : $\frac{d}{t} < 20$

Ce cas se ramène à celui de l'arbre plein (cf. graphique, p. 24).

2^e cas : $\frac{d}{t} > 20$

(cf. graphique ci-contre)

Remarque. — On constate sur le graphique que K_t varie peu en fonction de $\frac{r}{t}$. Ceci peut se traduire par la remarque suivante : La forme et les dimensions extérieures d'un arbre étant données, les concentrations des contraintes sont peu sensibles au diamètre de l'alésage, ce qui n'est pas le cas de la contrainte nominale.

FORMULES (d'après [1])

$$K_t = A + e^{-0,35 \frac{a}{t}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2} - \frac{1}{(B'-1)^2} + \frac{1}{(F'-1)^2}}}$$

$$B = \frac{\alpha_1 - 2\beta}{1 - \frac{\beta}{y}} + \frac{2y - \alpha_1}{4\frac{y}{\alpha_2} - 3\frac{\alpha_1}{y}}; \quad C = 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

$$\alpha_1 = \frac{2xy^2}{y^2 \text{Arctg } x + x}; \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \frac{x^3}{x + (x^2 - 1) \text{Arctg } x}; \quad \beta = \frac{\alpha_1 - y}{\frac{4y}{3\alpha_2} - 1}$$

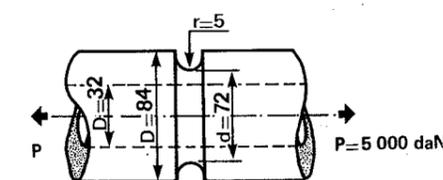
$$x = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t} \cdot \frac{t}{a}}}; \quad y = \sqrt{\frac{1}{\frac{r}{t} \cdot \frac{t}{a}} + 1}$$

B' : même expression que B, avec :

$$x' = \sqrt{\frac{50}{\frac{r}{t}}}; \quad y' = \sqrt{\frac{50}{\frac{r}{t}} + 1}$$

$$F' = \frac{x'^2(y' + 0,8) + 1,3(y' + 1)}{x'^2 + 0,6y' + 2}$$

EXEMPLES D'APPLICATIONS



1^{er} cas :

$$\frac{d}{t} = \frac{d}{D - d} = \frac{72}{6} = 12$$

$\frac{d}{t} < 20 \Rightarrow$ cf. graphique p. 24

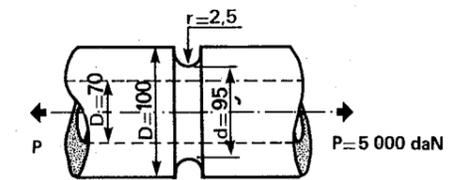
$$\frac{r}{t} = \frac{5}{6} \approx 0,83$$

$$\frac{d}{D} = \frac{72}{84} \approx 0,86$$

$$K_t = 2,5$$

$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi(d^2 - D_i^2)} = \frac{4 \times 5000}{\pi(72^2 - 32^2)} = 1,53 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,5 \times 1,53 \approx 3,8 \text{ daN/mm}^2$$



2^e cas :

$$\frac{d}{t} = \frac{95}{D - d} = \frac{95}{2,5} = 38$$

$\frac{d}{t} > 20 \Rightarrow$ cf. graphique ci-contre

$$\frac{r}{t} = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

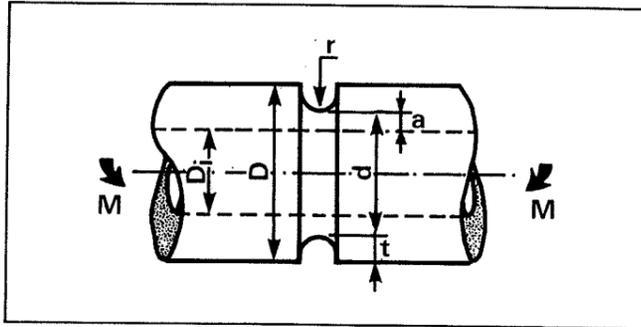
$$\frac{t}{a} = \frac{t}{\frac{D - D_i}{2}} = \frac{2,5}{\frac{95 - 70}{2}} = \frac{2,5}{12,5} = 0,2$$

$$K_t = 2,8$$

$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi(d^2 - D_i^2)} = \frac{4 \times 5000}{\pi(95^2 - 70^2)} \approx 1,54 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,8 \times 1,54 \approx 4,3 \text{ daN/mm}^2$$

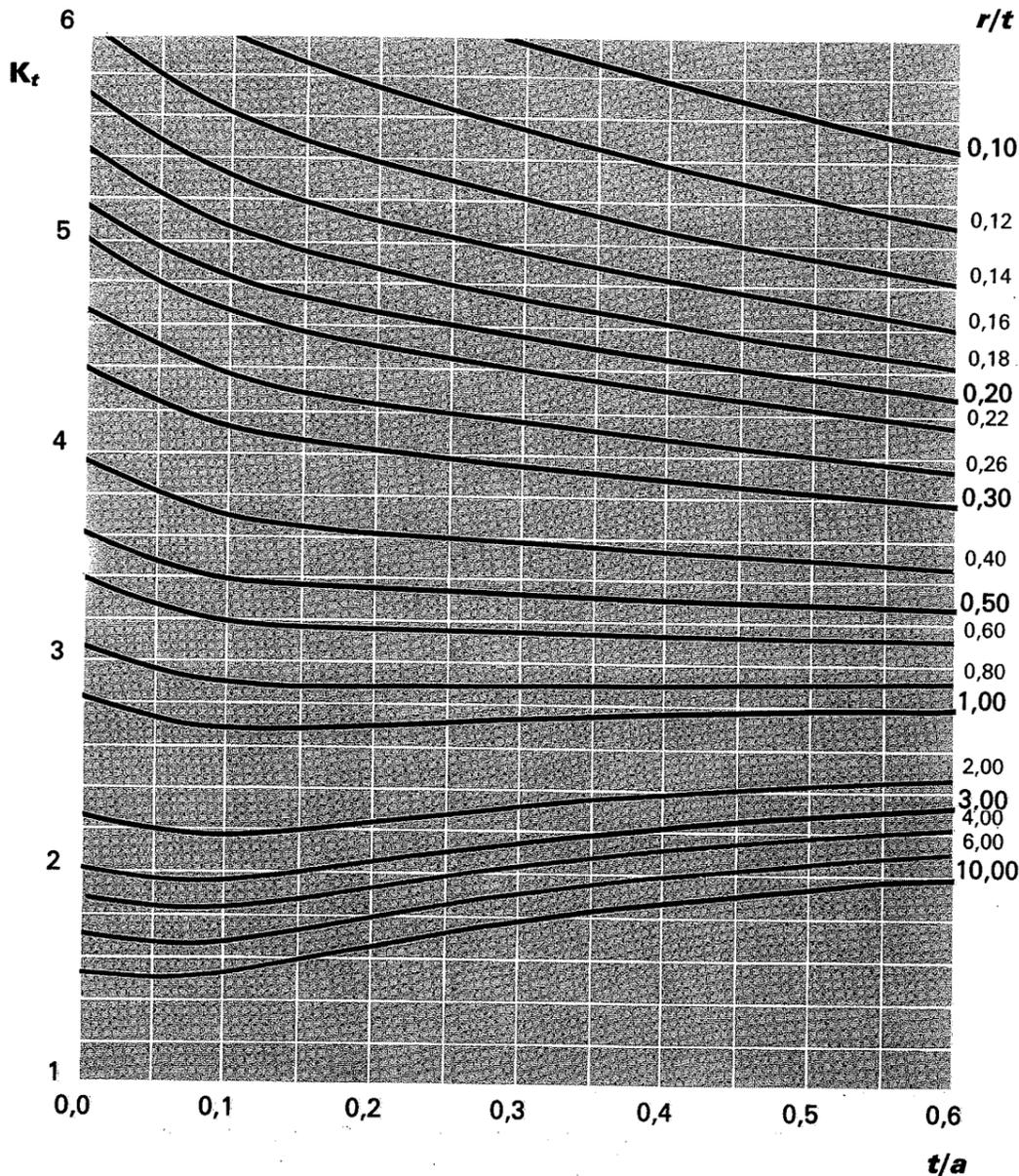
Arbre creux avec gorge extérieure à fond semi-circulaire



Cette fiche se rapporte au cas où $\frac{d}{t} > 20$.

Si $\frac{d}{t} < 20$, cf. p. 26.

$$\sigma_{nom} = \frac{32 M d}{\pi (d^4 - D_i^4)}$$



ARBRE CREUX AVEC GORGE EXTÉRIEURE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

FORMULES (d'après [1])

$$K_t = A + e^{-0.35 \frac{a}{t}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2} - \frac{1}{(B'-1)^2} + \frac{1}{(F'-1)^2}}}$$

$$B = \frac{\alpha_1 - 2\beta}{1 - \frac{\beta}{y}} + \frac{2y - \alpha_1}{4\frac{y}{\alpha_2} - 3\frac{\alpha_1}{y}}; \quad C = 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

$$\alpha_1 = \frac{2xy^2}{y^2 \text{Arctg } x + x}; \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{x + (x^2 - 1) \text{Arctg } x}; \quad \beta = \frac{\alpha_1 - y}{4y - 1 - 3\alpha_2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t} \cdot \frac{t}{a}}}; \quad y = \sqrt{\frac{1}{\frac{r}{t} \cdot \frac{t}{a}} + 1}$$

B' : même expression que B, avec :

$$x' = \sqrt{\frac{50}{\frac{r}{t}}}; \quad y' = \sqrt{\frac{50}{\frac{r}{t}} + 1}$$

$$F' = \frac{3}{4} \cdot \frac{(y' + 1)^2 (3x'^2 - 0.4y' + 4.3)}{3y'^3 + 5.2y'^2 + 2.2y' + 1.3}$$

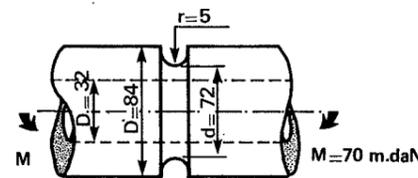
1^{er} cas : $\frac{d}{t} < 20$

Ce cas se ramène, à celui de l'arbre plein (cf. graphique p. 26).

2^e cas : $\frac{d}{t} > 20$

(cf. graphique ci-contre).

EXEMPLES D'APPLICATIONS



1^{er} cas :

$$\frac{d}{t} = \frac{d}{D-d} = \frac{72}{6} = 12$$

$\frac{d}{t} < 20 \Rightarrow$ cf. graphique p. 26

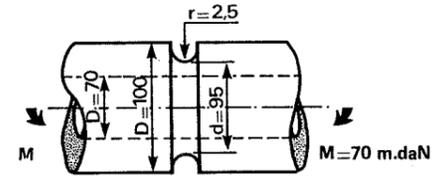
$$\frac{r}{t} = \frac{5}{6} = 0,83$$

$$\frac{d}{D} = \frac{72}{84} = 0,86$$

$$K_t = 2,2$$

$$\sigma_{nom} = \frac{32 M d}{\pi (d^4 - D_i^4)} = \frac{32 \times 70 \times 10^3 \times 72}{\pi (72^4 - 32^4)} \approx 2 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,2 \times 2 = 4,4 \text{ daN/mm}^2$$



2^e cas :

$$\frac{d}{t} = \frac{d}{D-d} = \frac{95}{2,5} = 38$$

$\frac{d}{t} > 20 \Rightarrow$ cf. graphique ci-contre

$$\frac{r}{t} = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

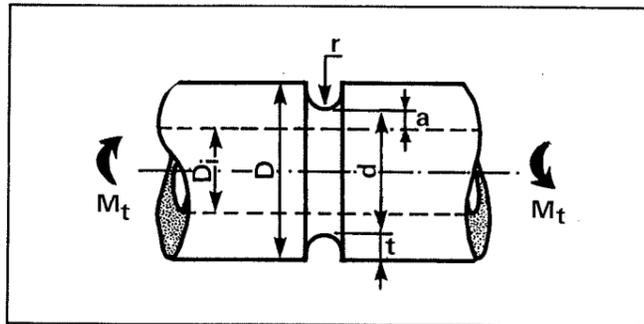
$$\frac{t}{a} = \frac{t}{\frac{d-D_i}{2}} = \frac{2,5}{12,5} = 0,2$$

$$K_t = 2,7$$

$$\sigma_{nom} = \frac{32 M d}{\pi (d^4 - D_i^4)} = \frac{32 \times 70 \times 10^3 \times 95}{\pi (95^4 - 70^4)} \approx 1,18 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,7 \times 1,18 = 3,2 \text{ daN/mm}^2$$

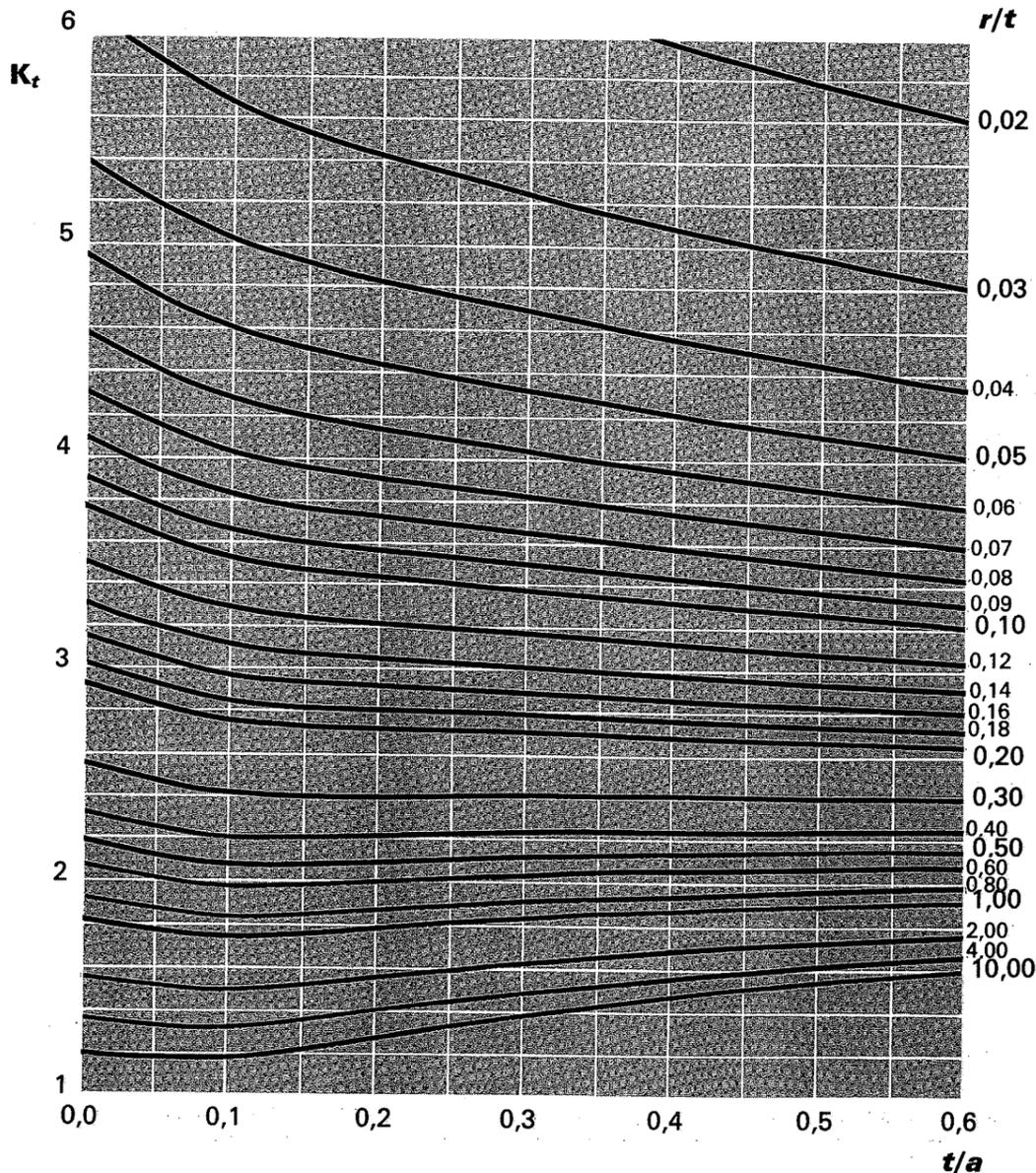
Arbre creux avec gorge extérieure à fond semi-circulaire



Cette fiche se rapporte au cas où $\frac{d}{t} > 20$.

Si $\frac{d}{t} < 20$, cf. p. 28.

$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t d}{\pi (d^4 - D_i^4)}$$



FORMULES (d'après [1])

$$K_t = A + e^{-0,35 \frac{a}{t}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2} + \frac{1}{(B'-1)^2} + \frac{1}{(F'-1)^2}}}$$

$$B = \frac{x}{\text{Arctg } x}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t} \cdot \frac{t}{a}}}$$

$$C = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

$$B' = \frac{y}{\text{Arctg } y}; \quad y = \sqrt{\frac{20}{\frac{r}{t}}}$$

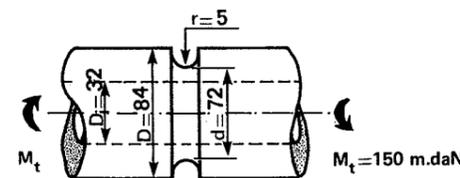
$$F' = \frac{3(1+z)^2}{4(1+2z)}; \quad z = \sqrt{\frac{20}{\frac{r}{t}} + 1}$$

ARBRE CREUX AVEC GORGE EXTÉRIEURE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

1^{er} cas : $\frac{d}{t} < 20$
Ce cas se ramène à celui de l'arbre plein (cf. graphique p. 28).

2^e cas : $\frac{d}{t} > 20$
(cf. graphique ci-contre).

EXEMPLES D'APPLICATIONS



1^{er} cas :

$$\frac{d}{t} = \frac{d}{D-d} = \frac{72}{6} = 12$$

$\frac{d}{t} < 20 \Rightarrow$ cf. graphique p. 24

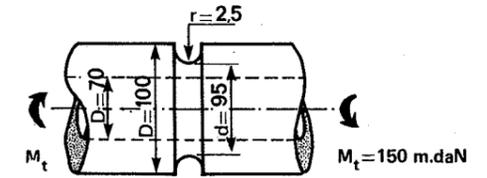
$$\frac{r}{t} = \frac{5}{6} = 0,83$$

$$\frac{d}{D} = \frac{72}{84} = 0,86$$

$$K_t = 1,6$$

$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t d}{\pi (d^4 - D_i^4)} = \frac{16 \times 150 \times 10^3 \times 72}{\pi (72^4 - 32^4)} = 2,1 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau_{réelle} = K_t \times \tau_{nom} = 1,6 \times 2,1 \approx 3,4 \text{ daN/mm}^2$$



2^e cas :

$$\frac{d}{t} = \frac{d}{D-d} = \frac{95}{2,5} = 38$$

$\frac{d}{t} > 20 \Rightarrow$ cf. graphique ci-contre

$$\frac{r}{t} = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

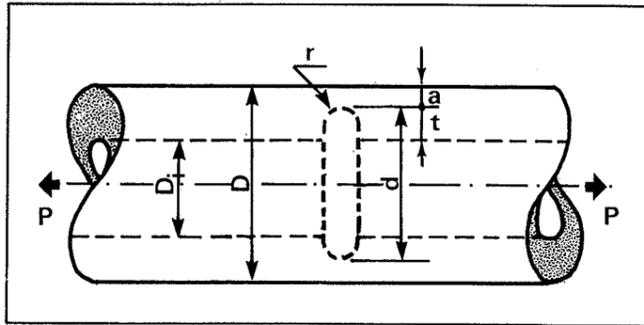
$$\frac{t}{a} = \frac{2,5}{\frac{d - D_i}{2}} = \frac{2,5}{12,5} = 0,2$$

$$K_t = 1,80$$

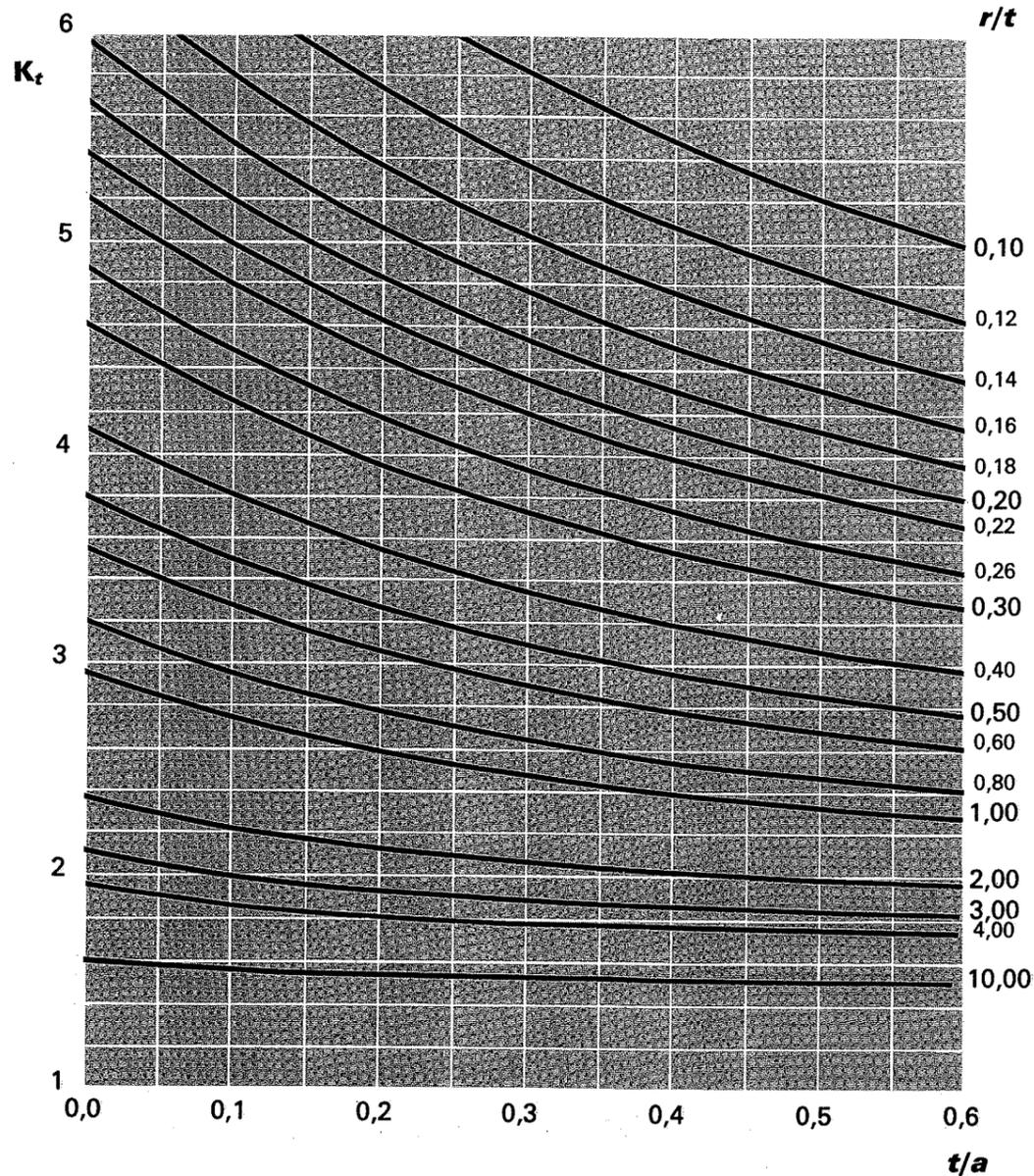
$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t d}{\pi (d^4 - D_i^4)} = \frac{16 \times 150 \times 10^3 \times 95}{\pi (95^4 - 70^4)} = 1,26 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau_{réelle} = K_t \times \tau_{nom} = 1,80 \times 1,26 \approx 2,3 \text{ daN/mm}^2$$

Arbre creux avec gorge intérieure à fond semi-circulaire



$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)}$$



ARBRE CREUX AVEC GORGE INTÉRIEURE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

FORMULES (d'après [1])

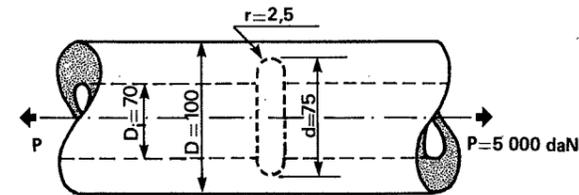
$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2}}} + 1$$

$$B = 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{t}}}; \quad C = \frac{\alpha_1 - 2\beta}{1 - \frac{\beta}{y}} + \frac{2y - \alpha_1}{\frac{4y}{\alpha_2} - \frac{3\alpha_1}{y}}$$

$$\alpha_1 = \frac{2xy^2}{x + y^2 \text{Arctg } x}; \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{x + (x^2 - 1) \text{Arctg } x}; \quad \beta = \frac{\alpha_1 - y}{\frac{4y}{3\alpha_2} - 1}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{r}}; \quad y = \sqrt{\frac{a}{r} + 1}; \quad \frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{r}{t} \times \frac{t}{a}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{r}{t} = \frac{r}{d - D_i} = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

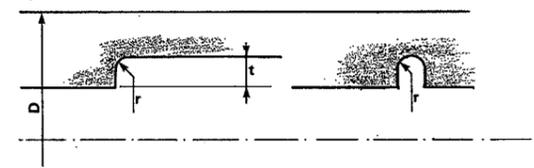
$$\frac{t}{a} = \frac{t}{\frac{D - d}{2}} = \frac{2,5}{12,5} = 0,2$$

$$K_t = 2,63$$

$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \times 5000}{\pi(100^2 - 75^2)} = 1,46 \text{ daN/mm}^2$$

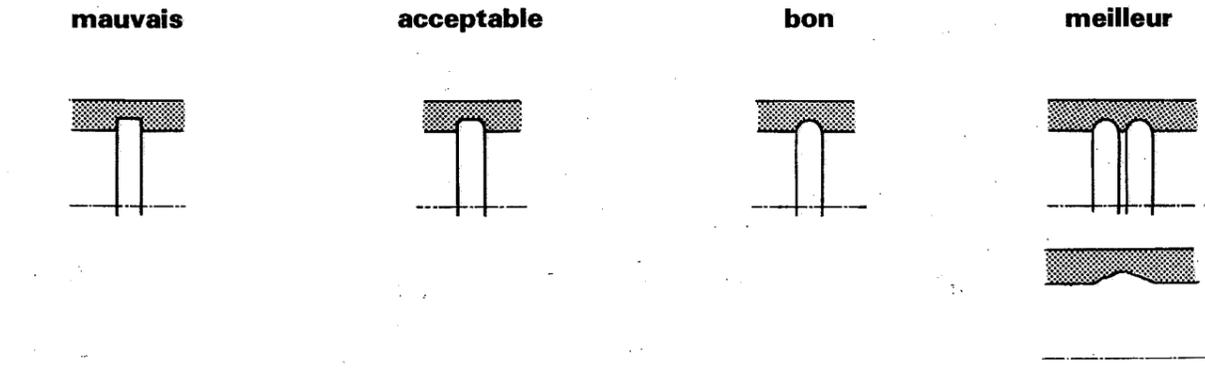
$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,63 \times 1,46 = 3,84 \text{ daN/mm}^2$$

Remarque



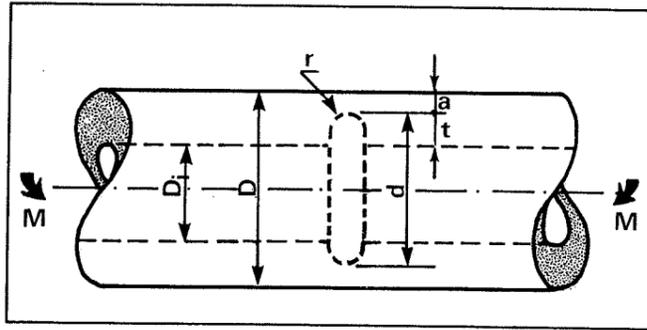
Il n'existe pas pour l'instant de travaux sur les épaulements intérieurs. Cependant on peut dire avec certitude qu'à paramètre égaux, un épaulement (fig. 1) concentre moins les contraintes qu'une gorge (fig. 2).

CONSEILS PRATIQUES

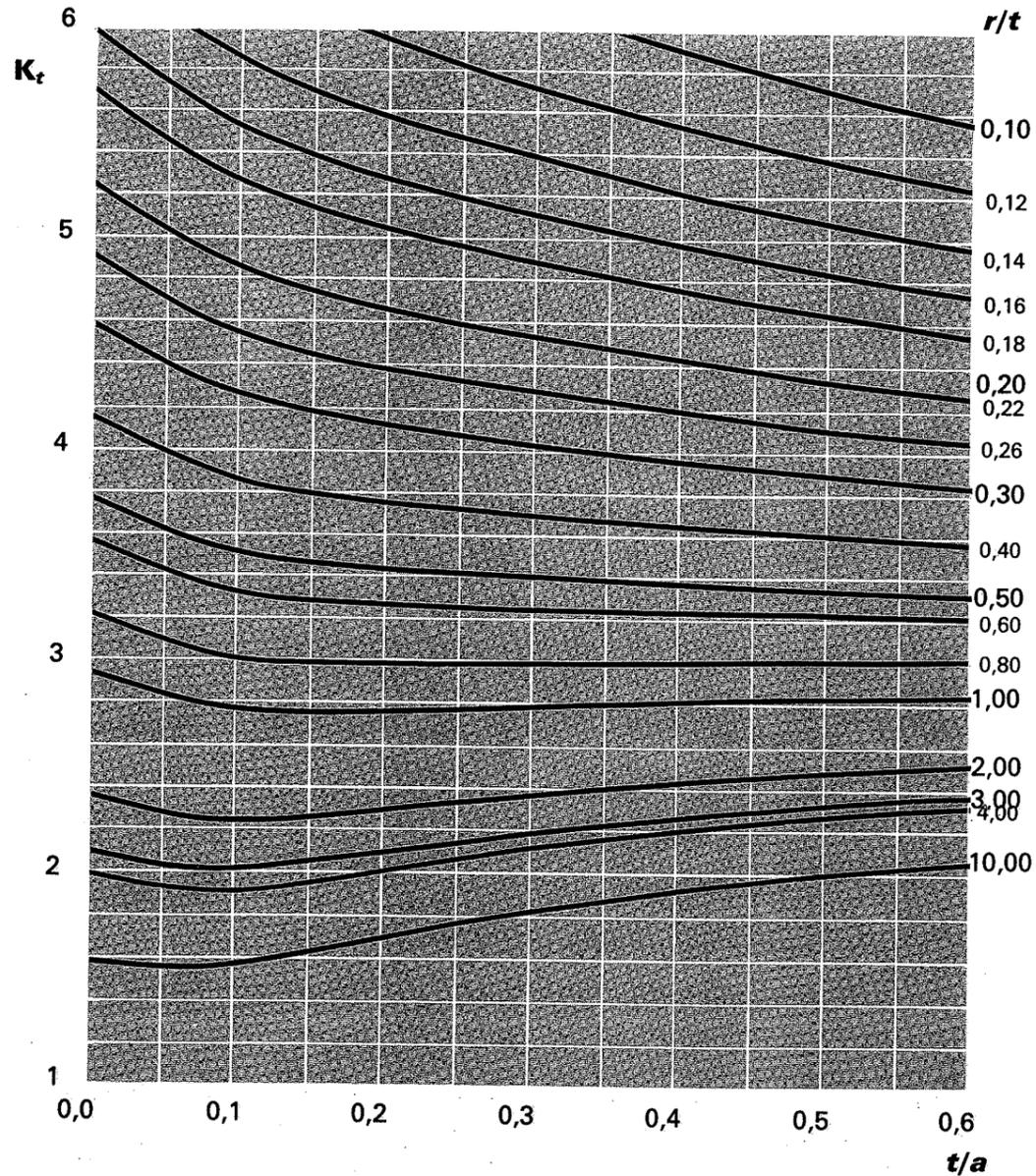


On retrouve pour les gorges intérieures le même classement des formes que pour les gorges extérieures.

Arbre creux avec gorge intérieure à fond semi-circulaire



$$\sigma_{nom.} = \frac{32 M d}{\pi (D^4 - d^4)}$$



FLEXION

ARBRE CREUX
AVEC GORGE INTÉRIEURE
À FOND SEMI-CIRCULAIRE

FORMULES (d'après [1])

$$K_r = A + e^{-0,35 \frac{a}{t}}$$

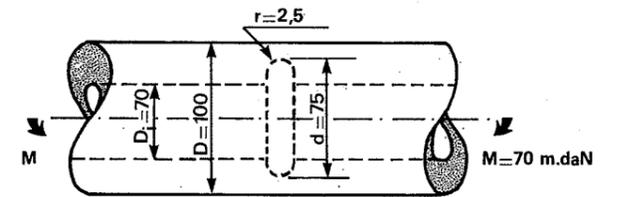
$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2}}} + 1$$

$$B = 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{t}}}; \quad C = \frac{\alpha_1 - 2\beta}{1 - \frac{\beta}{y}} + \frac{2y - \alpha_1}{\alpha_2 - \frac{3\alpha_1}{y}}$$

$$\alpha_1 = \frac{2xy^2}{x+y^2 \operatorname{Arctg} x}; \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \frac{x^3}{x+(x^2-1) \operatorname{Arctg} x}; \quad \beta = \frac{\alpha_1 - y}{\frac{4y}{3\alpha_2} - 1}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{r}}; \quad y = \sqrt{\frac{a}{r} + 1}; \quad \frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{r}{t} \times \frac{t}{a}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{r}{t} = \frac{r}{d - D_i} = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

$$\frac{t}{a} = \frac{t}{D - d} = \frac{2,5}{12,5} = 0,2$$

$$K_r = 2,80$$

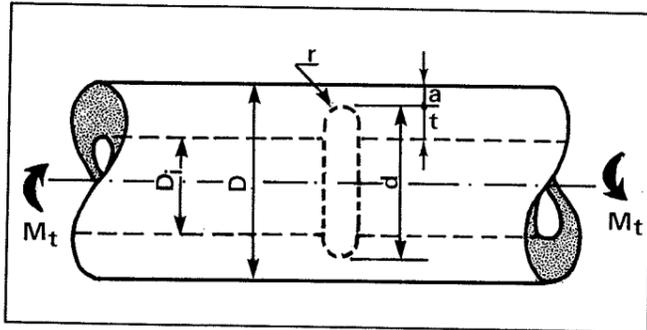
$$\sigma_{nom} = \frac{32 M d}{\pi (D^4 - d^4)} = \frac{32 \times 70 \times 10^3 \times 75}{\pi (100^4 - 75^4)} = 0,78 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_r \times \sigma_{nom} = 2,80 \times 0,78 = 2,19 \text{ daN/mm}^2$$

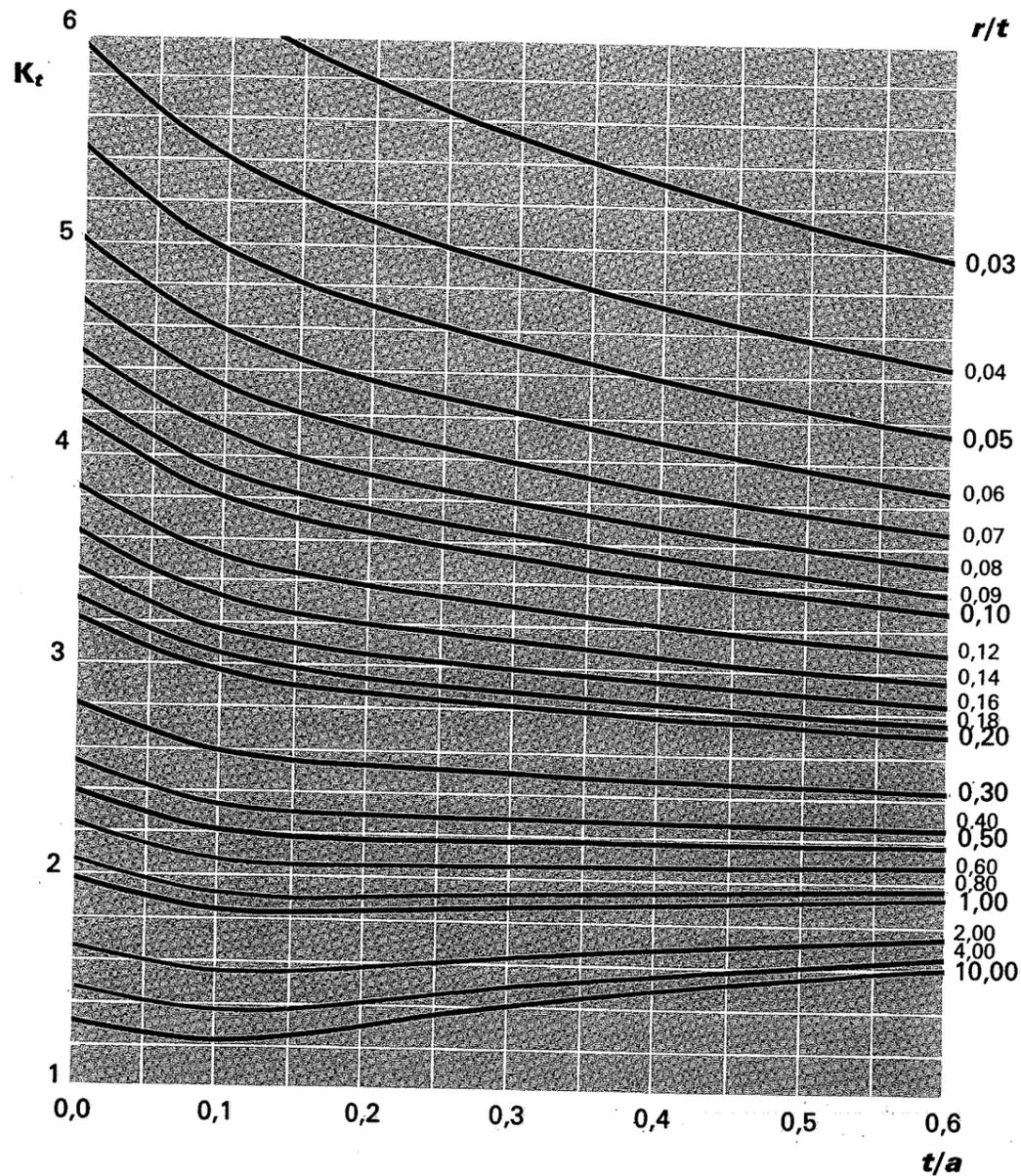
Remarque

On suppose dans ce calcul que la contrainte maximale réelle est au fond de gorge. Lorsque le rayon de fond de gorge est très grand, il peut se faire qu'elle soit à la périphérie de la pièce. Ceci est vrai si $K_r < \frac{D}{d}$

Arbre creux avec gorge intérieure à fond semi-circulaire



$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t d}{\pi (D^4 - d^4)}$$



TORSION

ARBRE CREUX
AVEC GORGE INTÉRIEURE
À FOND SEMI-CIRCULAIRE

FORMULES (d'après [1])

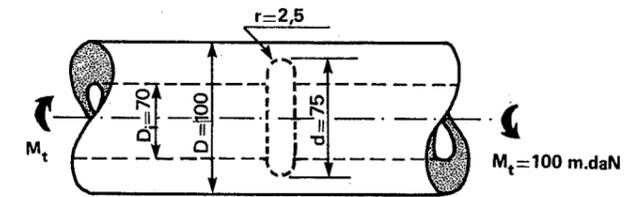
$$K_t = A + e^{-0,35 \frac{a}{r}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2}}} + 1$$

$$B = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}; \quad C = \frac{\sqrt{\frac{a}{r}}}{\text{Arctg} \sqrt{\frac{a}{r}}}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{r}{t} \times \frac{t}{a}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{r}{t} = \frac{2,5}{25} = 0,1$$

$$\frac{t}{a} = \frac{25}{\frac{100-75}{2}} = 0,2$$

$$K_t = 1,86$$

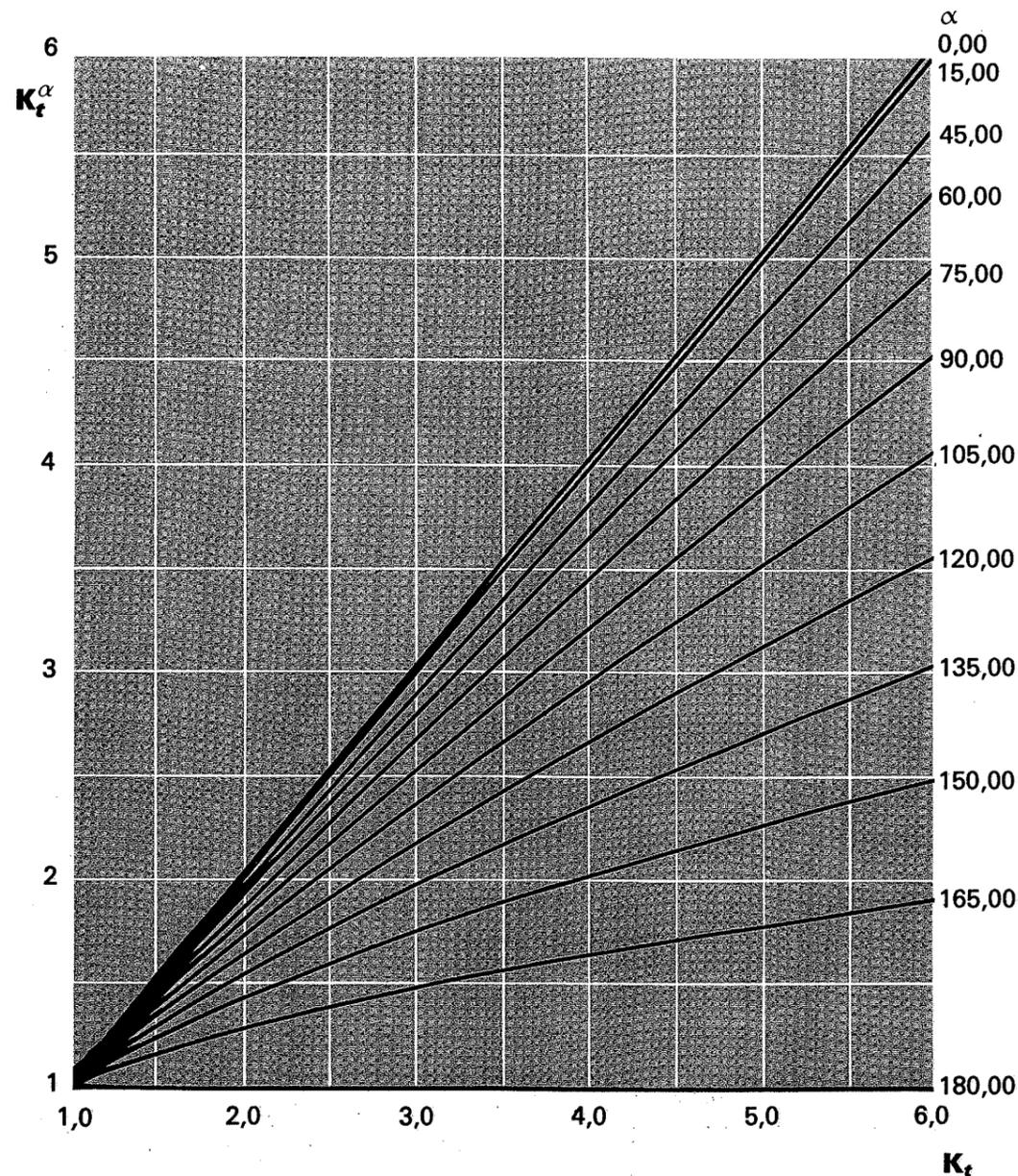
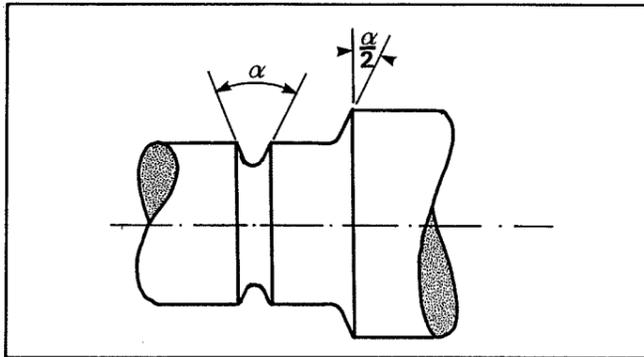
$$\tau_{nom} = \frac{16 M_t \cdot d}{\pi (D^4 - d^4)} = \frac{16 \times 100 \times 10^3 \times 75}{\pi (100^4 - 75^4)} = 0,56 \text{ daN/mm}^2$$

$$\tau_{réelle} = K_t \times \tau_{nom} = 1,86 \times 0,56 \approx 1,04 \text{ daN/mm}^2$$

Remarque

On suppose dans ce calcul que la contrainte maximale réelle est au fond de gorge. Lorsque le rayon de fond de gorge est très grand, il peut se faire qu'elle soit à la périphérie de la pièce. Ceci est vrai si $K_t < \frac{D}{d}$

Epaulements et gorges à bords inclinés



FORMULES (d'après [2])

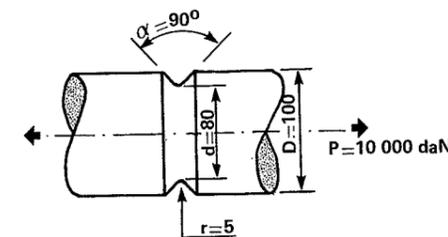
$$K_t^{(\alpha)} = K_t \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Pour le calcul de K_t se reporter aux fiches
 ARBRE AVEC GORGE A FOND SEMI-CIRCULAIRE
 (traction : p. 24, flexion : p. 26, torsion : p. 28).
 ARBRE ÉPAULE
 (traction : p. 16, flexion : p. 18, torsion : p. 20).

TOUS CAS DE CHARGE

ÉPAULEMENTS ET GORGES A BORDS INCLINÉS

EXEMPLE D'APPLICATION



K_t est déterminé à partir du graphique de la page 24 ARBRE AVEC GORGE A FOND SEMI-CIRCULAIRE, traction.

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{D-d} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{d}{D} = \frac{80}{100} = 0,8$$

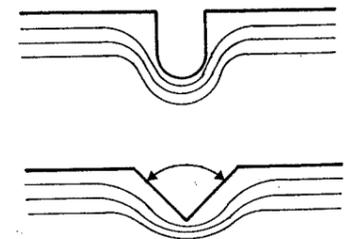
$$K_t = 2,8$$

$$K_t^{(\alpha=90^\circ)} = 2,38$$

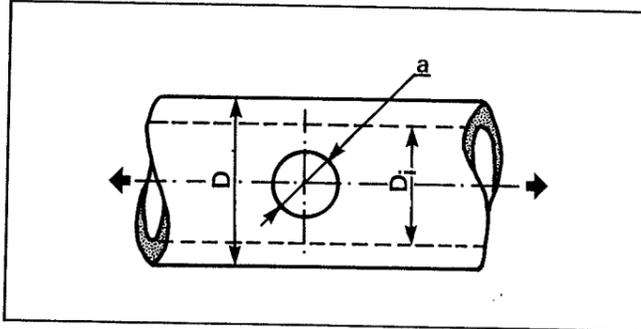
$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 10\,000}{\pi \times 80^2} \approx 2 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t^{(\alpha=90^\circ)} \times \sigma_{nom} = 2,38 \times 2 \approx 4,75 \text{ daN/mm}^2$$

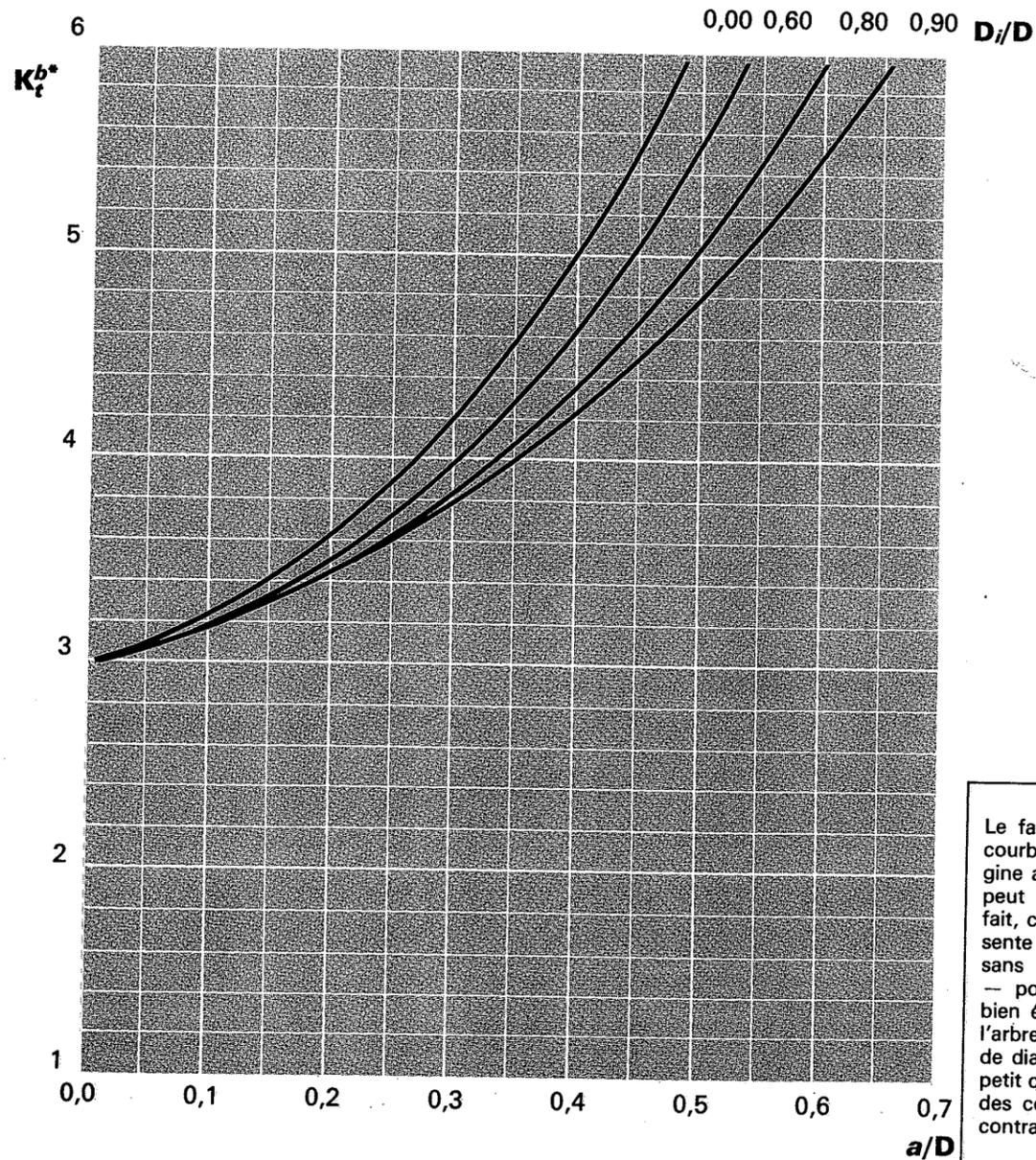
Remarque. — On comprend bien, en utilisant l'analogie de l'écoulement liquide que l'inclinaison des bords d'une gorge ou d'une entaille diminue le coefficient de concentration de contraintes. Cependant pour être efficace, cette inclinaison doit être importante ; entre 0 et 45° elle n'a pratiquement pas d'influence.



Arbre creux avec trou transversal



$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{4 P}{\pi (D^2 - D_i^2)}$$



Le fait que toutes les courbes aient leur origine au point $K_r^{(b)} = 3$ peut surprendre. En fait, ce point ne représente pas l'arbre creux sans trou transversal — pour lequel K_r est bien égal à 1 — mais l'arbre creux avec trou de diamètre infiniment petit qui engendre bien des concentrations de contraintes.

TRACTION

ARBRE CREUX
AVEC TROU TRANSVERSAL

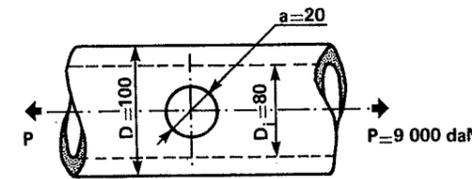
FORMULES (d'après [26])

$$K_r^{(b)} = 3 \left(\frac{a}{D} + 1 \right)^{\alpha \left(\frac{a}{D} + 1 \right) - \beta}$$

$$\alpha = \sqrt{-9,21 \left(\frac{D_i}{D} \right)^2 + 4,21 \frac{D_i}{D} + 5,27}$$

$$\beta = \sqrt{-8,03 \left(\frac{D_i}{D} \right)^2 + 4,67 \frac{D_i}{D} + 2,85}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



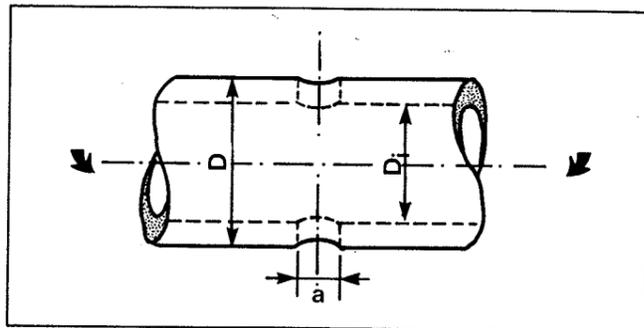
$$\left. \begin{aligned} \frac{D_i}{D} &= \frac{80}{100} = 0,8 \\ \frac{a}{D} &= \frac{20}{100} = 0,2 \end{aligned} \right\} K_r^{(b)} = 3,5$$

$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{4 P}{\pi (D^2 - D_i^2)} = \frac{4 \times 9\,000}{\pi (100^2 - 80^2)} = 3,2 \text{ daN/mm}^2$$

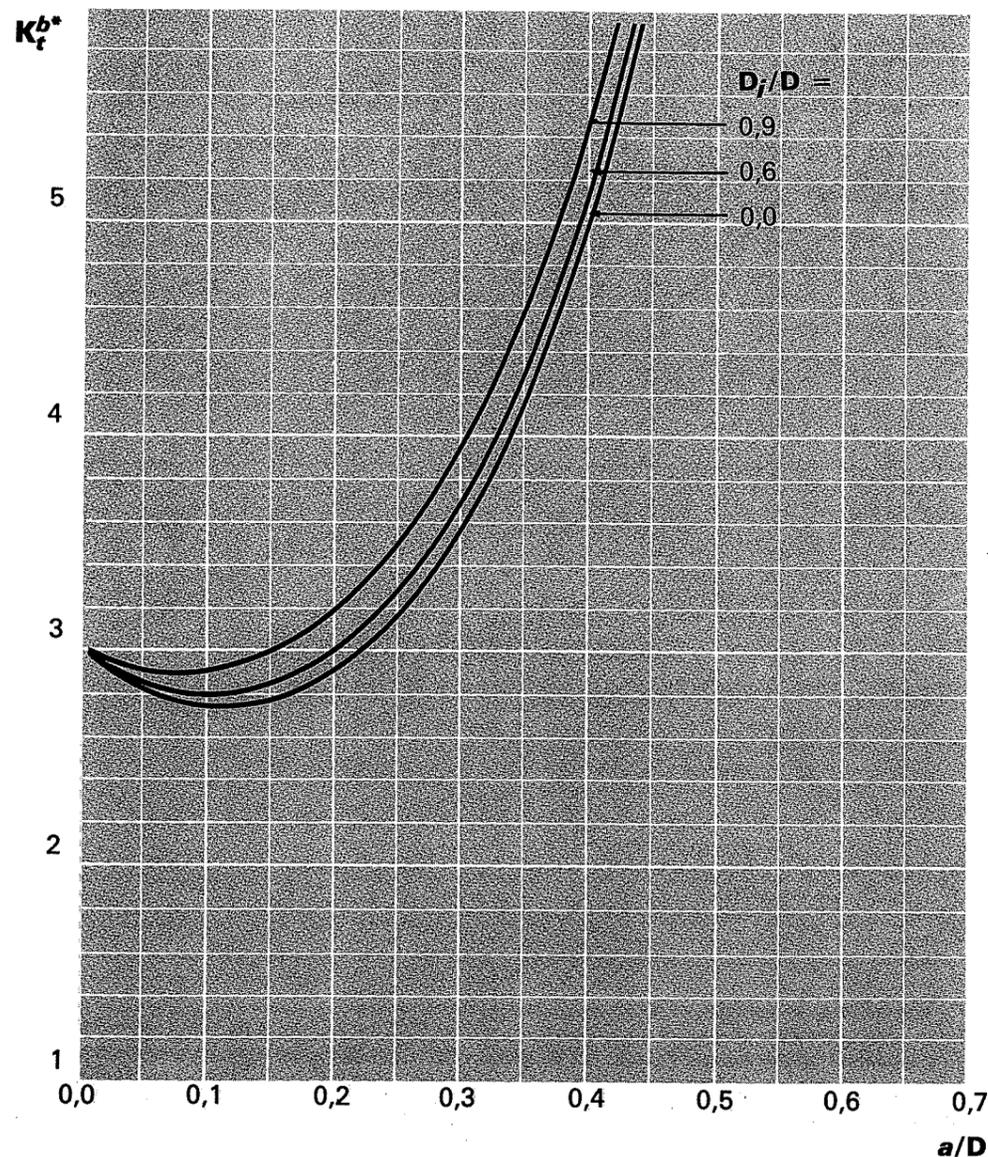
$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r^{(b)} \times \sigma_{\text{nom}}^{(b)} = 3,5 \times 3,2 = 11,2 \text{ daN/mm}^2$$

(*) Notations. — Dans le cas général, le coefficient K_r se rapporte à une contrainte nominale (σ_{nom}) calculée à partir de la plus petite section (plus petit diamètre pour un épaulement, section à fond de gorge dans le cas d'une gorge, etc.) ; le cas du trou transversal fait exception. Pour éviter au dessinateur des calculs fastidieux, la contrainte nominale est celle d'un arbre creux sans trou transversal ($\sigma_{\text{nom}}^{(b)}$). Pour ne pas créer de confusion, nous avons appelé $K_r^{(b)}$ (K_r brut) le coefficient qui s'y rapporte.

Arbre creux avec trou transversal



$$\sigma_{nom}^{(b)} = \frac{32 M D}{\pi (D^4 - D_i^4)}$$



Le fait que toutes les courbes aient leur origine au point $K_t^{(b)} = 3$ peut surprendre. En fait, ce point ne représente pas l'arbre creux sans trou transversal — pour lequel K_t est bien égal à 1 — mais l'arbre creux avec trou de diamètre infiniment petit qui engendre bien des concentrations de contraintes.

FLEXION

ARBRE CREUX AVEC TROU TRANSVERSAL

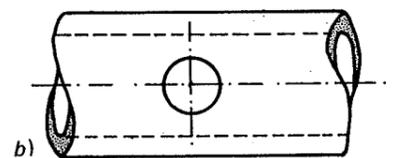
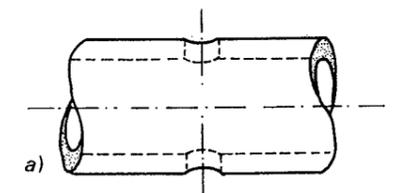
FORMULES (d'après [26])

$$K_t^{(b)} = 3 \left(\frac{a}{D} + 1 \right)^{\alpha \left(\frac{a}{D} + 1 \right) - \beta}$$

$$\alpha = \sqrt{-30,19 \left(\frac{D_i}{D} \right)^2 + 5,37 \frac{D_i}{D} + 71,55}$$

$$\beta = \sqrt{-57,45 \left(\frac{D_i}{D} \right)^2 + 9,92 \frac{D_i}{D} + 106,8}$$

Le cas de la flexion est particulier : l'orientation de l'axe du trou transversal par rapport au plan du moment de flexion a une grande influence sur les contraintes.



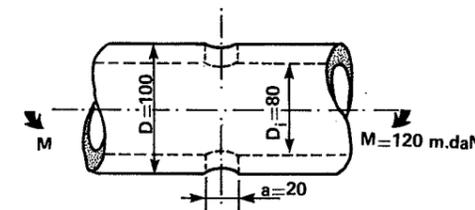
Les deux cas extrêmes sont représentés ici :

a) L'axe du trou est dans le plan de flexion. Les contraintes maximales se trouvent autour de la sortie du trou transversal. C'est le cas le plus défavorable. C'est celui que nous traitons.

b) L'axe du trou transversal est perpendiculaire au plan de flexion. Il a peu d'influence sur la résistance de la pièce.

Dans la majorité des cas réels, l'arbre tourne et le moment de flexion est fixe. On retrouve alternativement les deux situations A et B ci-dessus.

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\left. \begin{aligned} \frac{D_i}{D} &= \frac{80}{100} = 0,8 \\ \frac{a}{D} &= \frac{20}{100} = 0,2 \end{aligned} \right\}$$

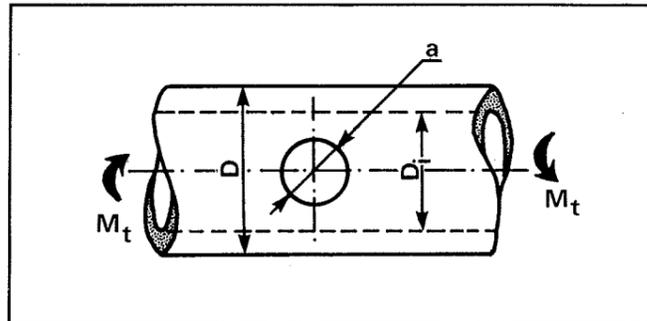
$$K_t^{(b)} = 3,1$$

$$\sigma_{nom}^{(b)} = \frac{32 \cdot M \cdot D}{\pi (D^4 - D_i^4)} = \frac{32 \times 120 \times 10^3 \times 100}{\pi (100^4 - 80^4)} = 2,07 \text{ daN/mm}^2$$

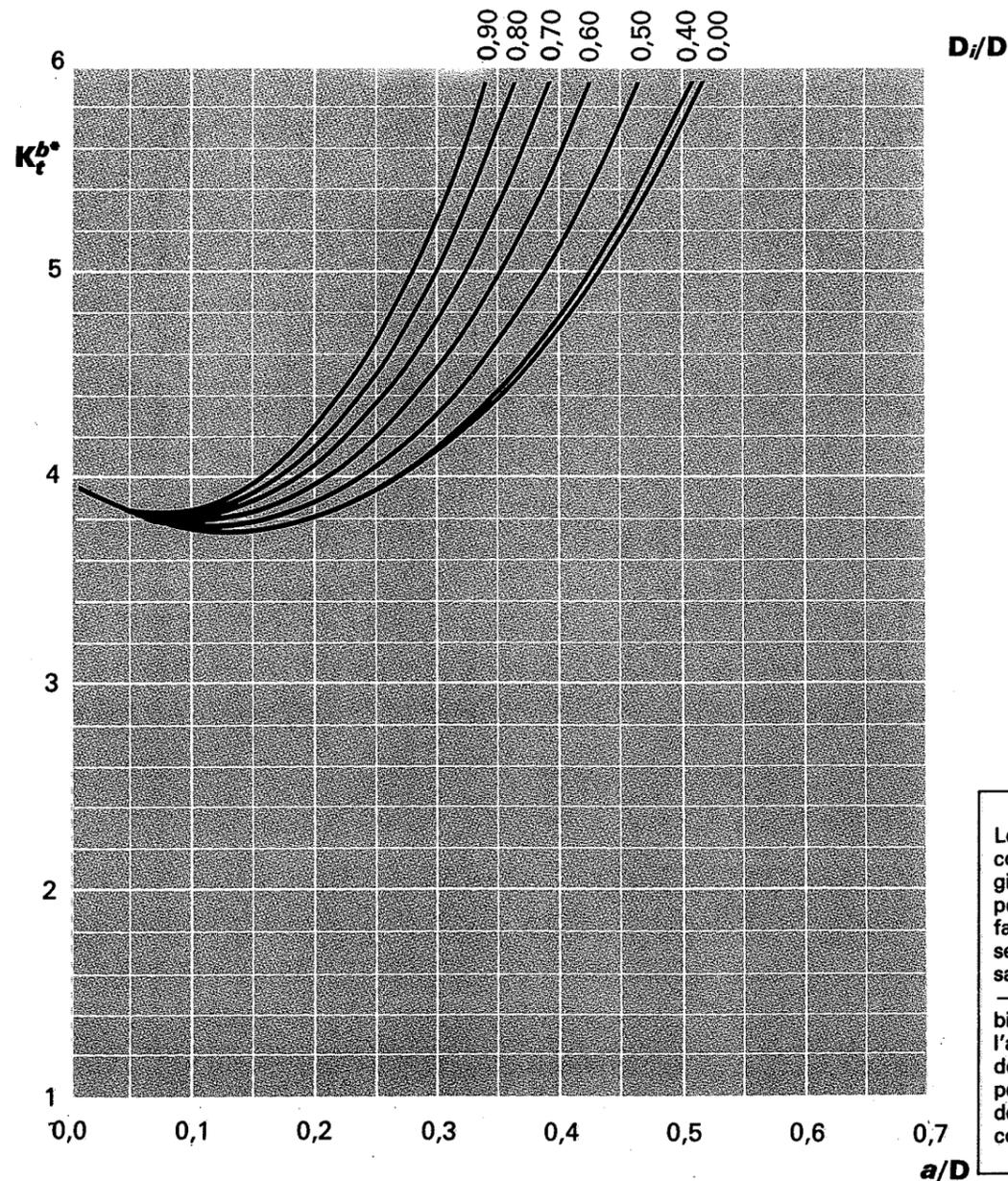
$$\sigma_{réelle} = K_t^{(b)} \times \sigma_{nom}^{(b)} = 3,1 \times 2,07 = 6,4 \text{ daN/mm}^2$$

(*) Notations. — Dans le cas général, le coefficient K_t se rapporte à une contrainte nominale (σ_{nom}) calculée à partir de la plus petite section (plus petit diamètre pour un épaulement, section à fond de gorge dans le cas d'une gorge, etc.) ; le cas du trou transversal fait exception. Pour éviter au dessinateur des calculs fastidieux, la contrainte nominale est celle d'un arbre creux sans trou transversal ($\sigma_{nom}^{(b)}$). Pour ne pas créer de confusion, nous avons appelé $K_t^{(b)}$ (K_t brut) le coefficient qui s'y rapporte.

Arbre creux avec trou transversal



$$\tau_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{16 M_t D}{\pi (D^4 - D_i^4)}$$



Le fait que toutes les courbes aient leur origine au point $K_t^{(b)} = 3$ peut surprendre. En fait, ce point ne représente pas l'arbre creux sans trou transversal — pour lequel K_t est bien égal à 1 — mais l'arbre creux avec trou de diamètre infiniment petit qui engendre bien des concentrations de contraintes.

TORSION

ARBRE CREUX
AVEC TROU TRANSVERSAL

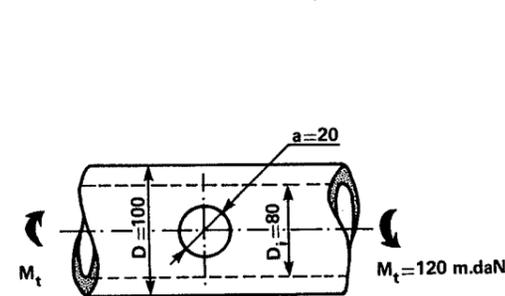
FORMULES (d'après [26])

$$K_t^{(b)} = 4 \left(\frac{a}{D} + 1 \right)^{\alpha \left(\frac{a}{D} + 1 \right) - \beta}$$

$$\alpha = \sqrt{78,50 \left(\frac{D_i}{D} \right)^2 - 28,20 \left(\frac{D_i}{D} \right) + 14,18}$$

$$\beta = \sqrt{93,53 \left(\frac{D_i}{D} \right)^2 - 32,62 \left(\frac{D_i}{D} \right) + 22,38}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



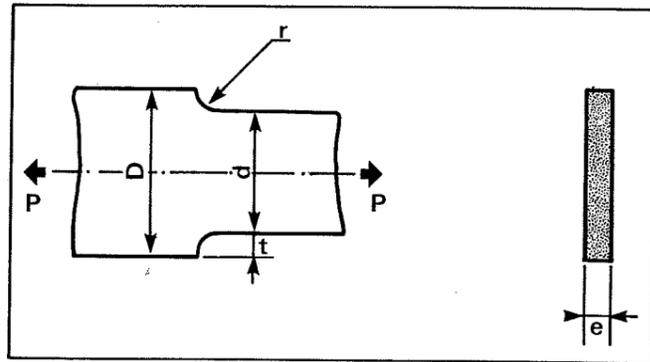
$$\left. \begin{aligned} \frac{D_i}{D} &= \frac{80}{100} = 0,8 \\ \frac{a}{D} &= \frac{20}{100} = 0,2 \end{aligned} \right\} K_t^{(b)} = 4,2$$

$$\tau_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{16 \cdot M_t \cdot D}{\pi (D^4 - D_i^4)} = \frac{16 \times 120 \times 10^3 \times 100}{\pi (100^4 - 80^4)} \simeq 1,03 \text{ daN/mm}^2$$

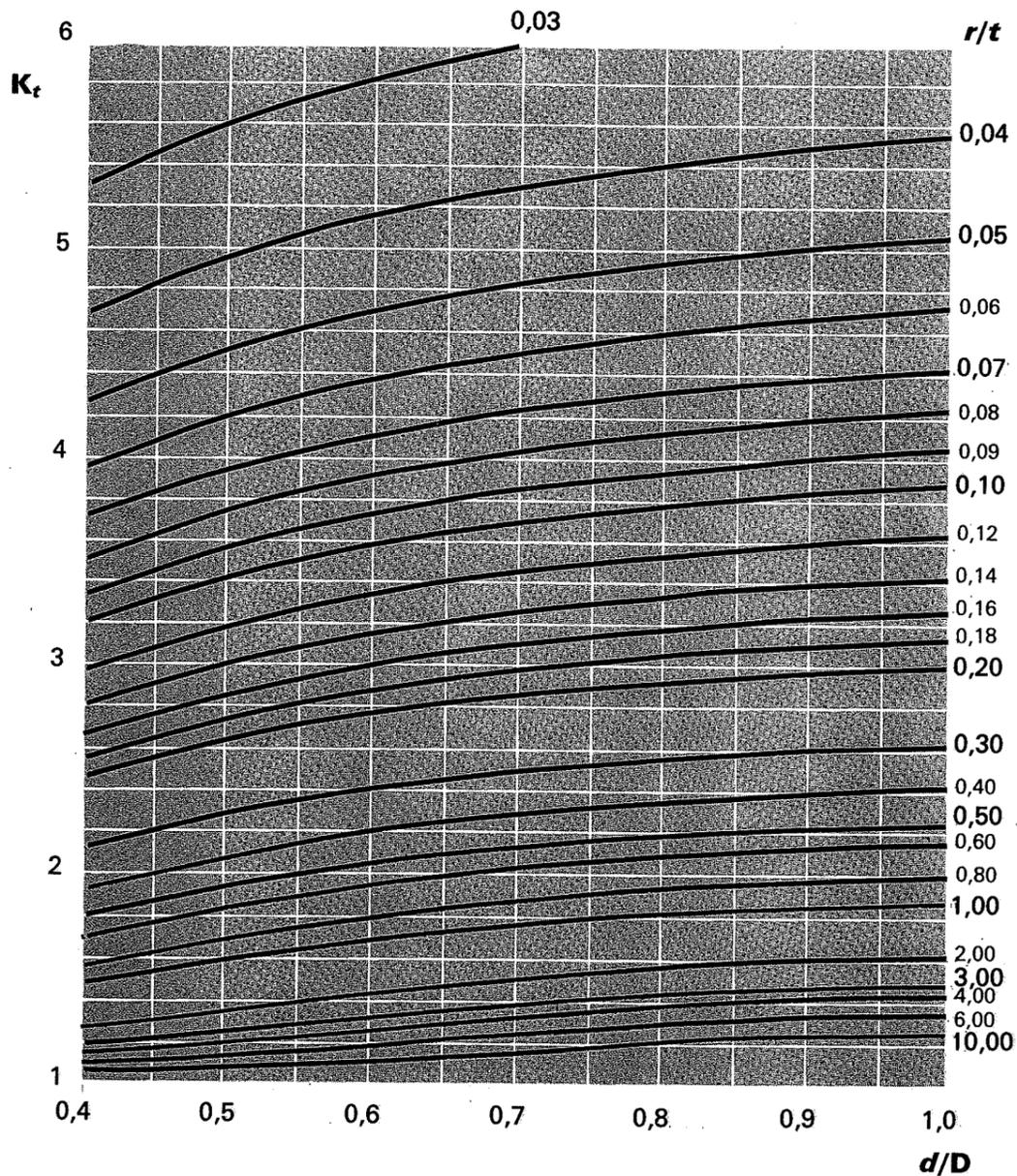
$$\tau_{\text{réelle}} = K_t^{(b)} \times \tau_{\text{nom}}^{(b)} = 4,2 \times 1,03 \simeq 4,4 \text{ daN/mm}^2$$

(*) Notations. — Dans le cas général, le coefficient K_t se rapporte à une contrainte nominale (τ_{nom}) calculée à partir de la plus petite section (plus petit diamètre pour un épaulement, section à fond de gorge dans le cas d'une gorge, etc.) ; le cas du trou transversal fait exception. Pour éviter au dessinateur des calculs fastidieux, la contrainte nominale est celle d'un arbre creux sans trou transversal ($\tau_{\text{nom}}^{(b)}$). Pour ne pas créer de confusion, nous avons appelé $K_t^{(b)}$ (K_t brut) le coefficient qui s'y rapporte.

Plaque épaulée



$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e d}$$



TRACTION

PLAQUE ÉPAULÉE

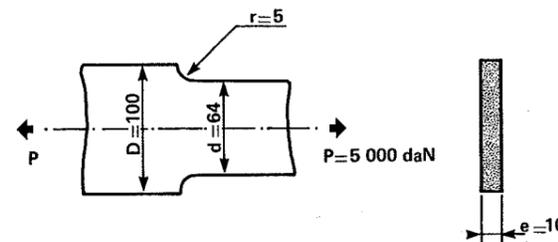
FORMULES (d'après [3], [9], [11], [19])

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1,938 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,917 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{\frac{d}{D}}{\frac{t}{r} \times \frac{d}{D} + 1} - 1}$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

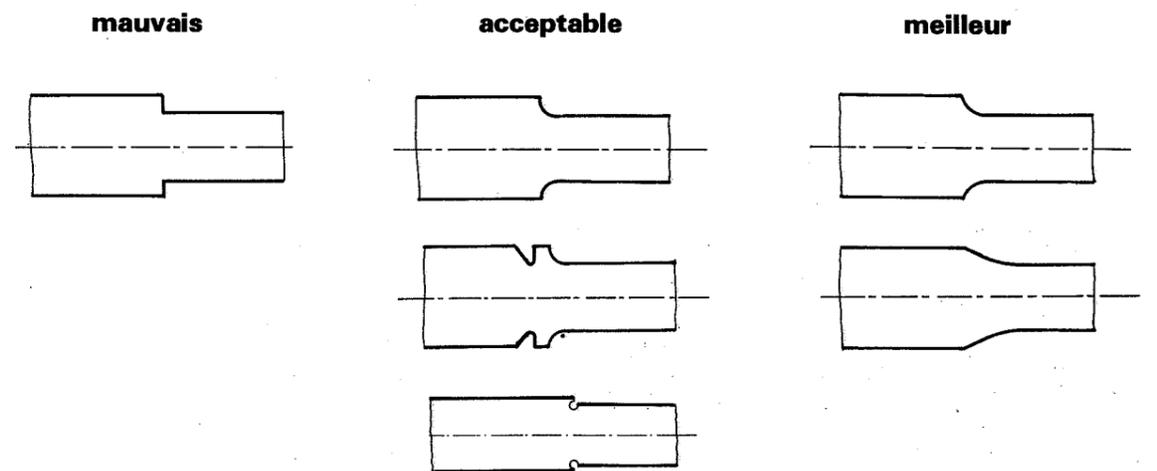
$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{5}{18} = 0,278$$

$$K_t = 2,5$$

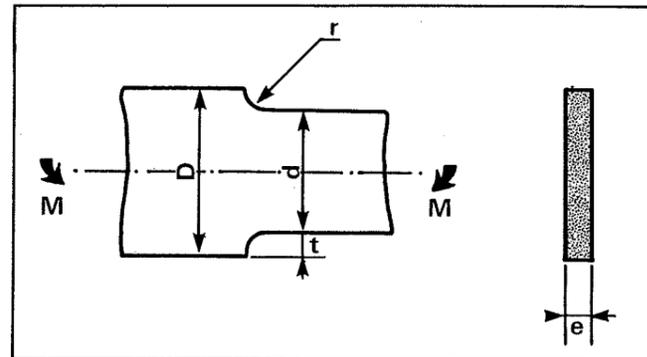
$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e \cdot d} = \frac{5\,000}{10 \times 64} = 7,8 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,5 \times 7,8 = 19,5 \text{ daN/mm}^2$$

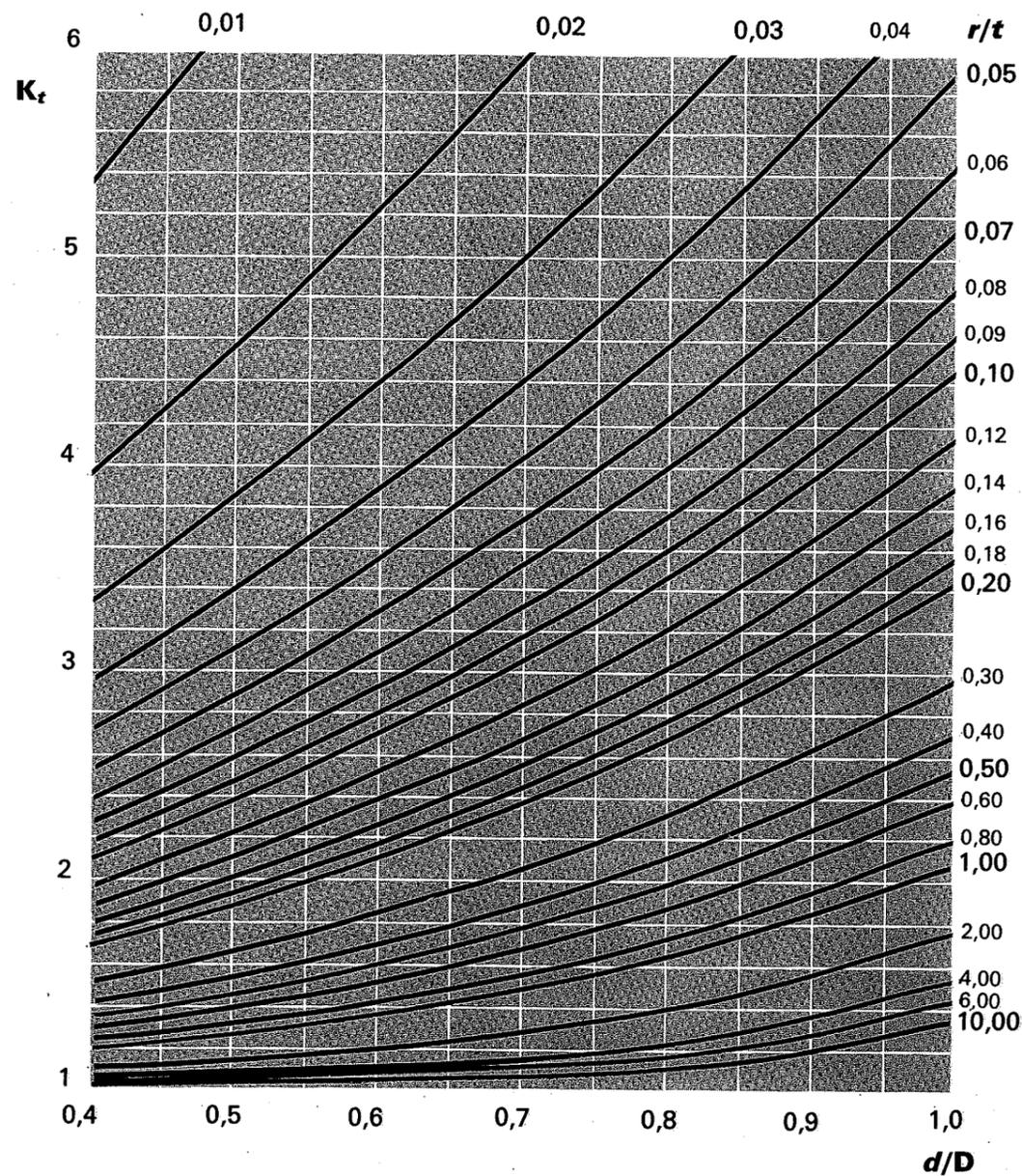
CONSEILS PRATIQUES



Plaque épaulée



$$\sigma_{nom} = \frac{6 M}{e d^2}$$



FLEXION

PLAQUE ÉPAULÉE

FORMULES (d'après [3], [16])

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,653 K_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{1,095 K_q}\right)^2}} + 1$$

$$K_p = \sqrt{\frac{t}{r} \times \frac{D}{1 - \frac{d}{D}} + 1} - 1$$

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

EXEMPLES D'APPLICATIONS

$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{5}{18} = 0,278$$

$K_t = 2$

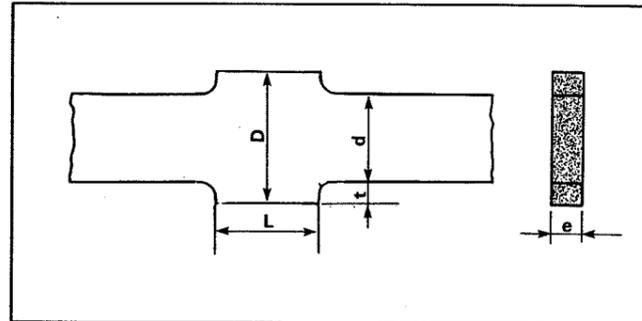
$$\sigma_{nom} = \frac{6 M}{e \cdot d^2} = \frac{6 \times 30 \times 10^3}{10 \times 64^2} = 4,4 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2 \times 4,4 = 8,8 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES

mauvais	acceptable	meilleur

Plaque à deux épaulements



1° Deux épaulements éloignés $L > 2d$

Les épaulements n'ont pas d'influence l'un sur l'autre. Pour le calcul de chacun d'eux se reporter aux graphiques correspondant au cas d'une plaque à simple épaulement (p. 50, traction, p. 52, flexion).

2° Deux épaulements rapprochés $L < 2d$

On détermine K_r comme dans le cas d'un simple épaulement, mais on remplace D par une hauteur équivalente $D_{\text{éq}}$ donnée par :

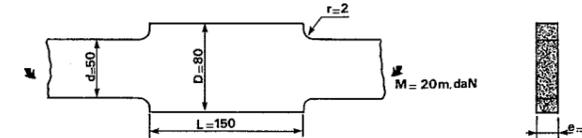
$$D_{\text{éq}} = d + 0,3 L$$

TOUS CAS

PLAQUE A DEUX ÉPAULEMENTS

EXEMPLES D'APPLICATIONS

$L > 2d$



$$\frac{d'}{D} = \frac{50}{80} = 0,625$$

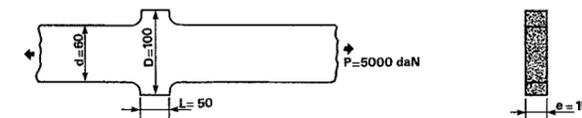
$$\frac{r}{t} = \frac{r}{D-d} = \frac{2}{15} = 0,13$$

$K_r = 2,5$
(graphique p. 52)

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{6 M}{e \cdot d^2} = \frac{6 \times 20 \times 10^3}{10 \times 50^2} \approx 4,8 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r \times \sigma_{\text{nom}} \approx 2,5 \times 4,8 = 12 \text{ daN/mm}^2$$

$L < 2d$



$$D_{\text{éq}} = 60 + 0,3 \times 50 = 75$$

$$\frac{d}{D_{\text{éq}}} = \frac{60}{75} = 0,8$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{D_{\text{éq}} - d} = \frac{2}{7,5} = 0,27$$

$K_r = 2,7$
(graphique p. 50)

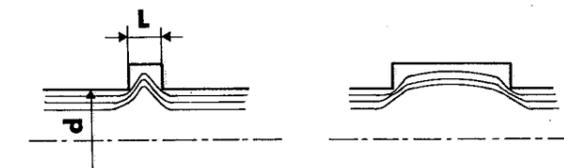
$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{e \cdot d} = \frac{5000}{15 \times 60} = 5,6 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r \times \sigma_{\text{nom}} = 2,7 \times 5,6 = 15 \text{ daN/mm}^2$$

Remarque. — La formule utilisée, $D_{\text{éq}} = d + 0,3 L$, est très approchée. De plus, elle ne fait pas intervenir la valeur de « D » ce qui physiquement est choquant. Elle a le mérite d'être très simple et d'avoir été éprouvée par de nombreux bureaux d'étude.

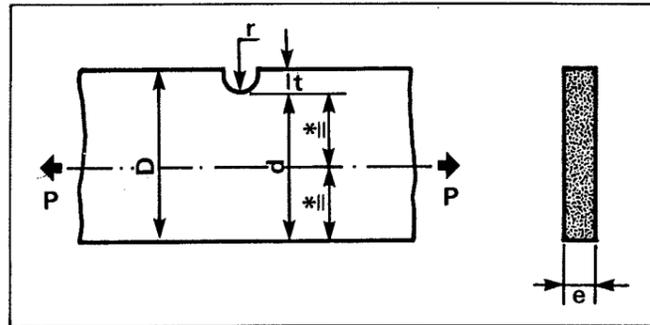


La grande largeur d'un double épaulement a une influence sur le coefficient de concentration de contraintes. Celui-ci augmente quand « D » augmente. Cependant, au-delà d'une certaine valeur qui dépend de la longueur « L », K_r devient constant. Le métal supplémentaire ne participe pas à la résistance de la pièce.

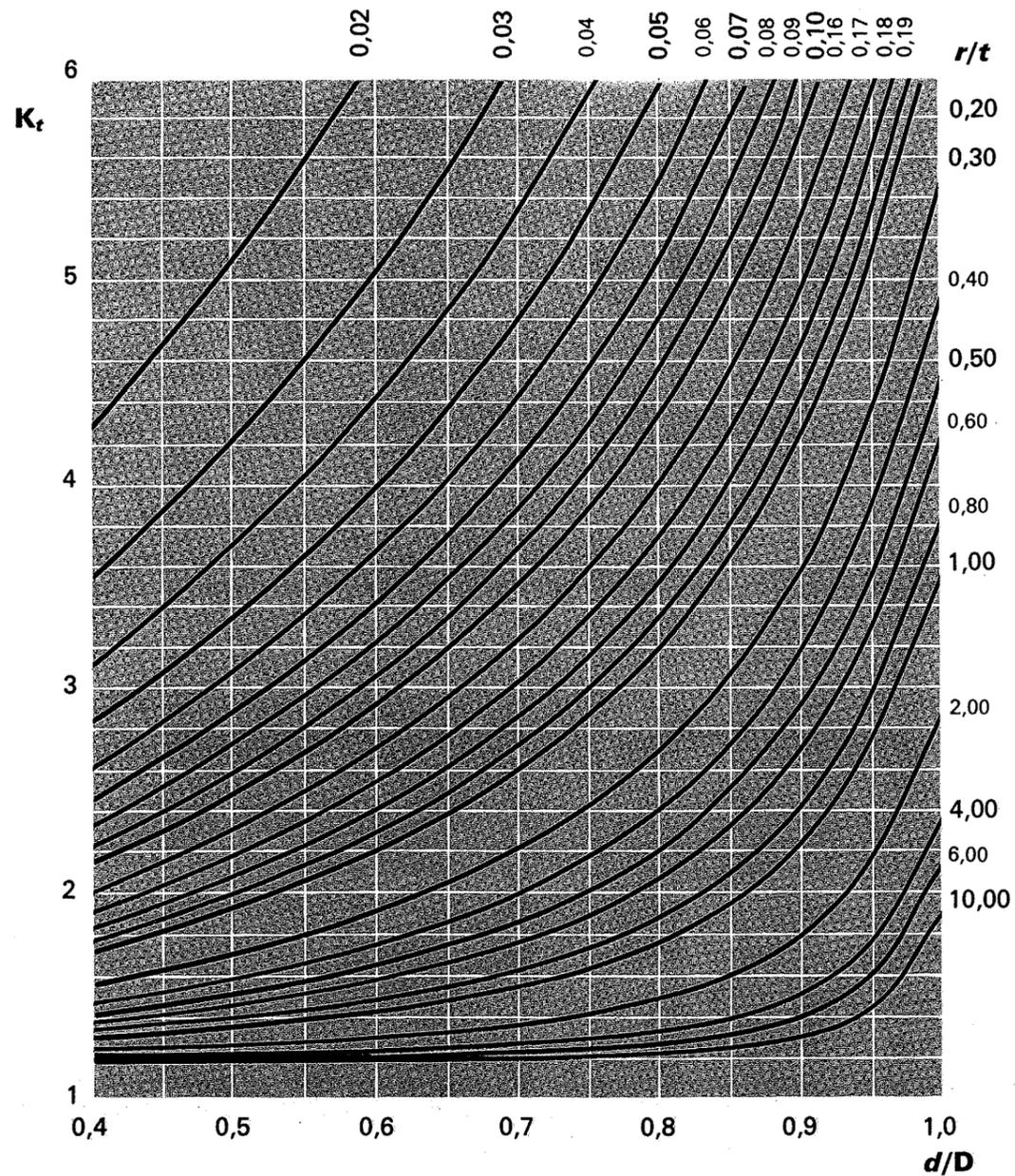


On peut envisager de la même façon l'influence de la longueur de l'épaulement. Le coefficient de concentration de contraintes augmente quand la longueur « L » augmente jusqu'au moment où les deux épaulements n'ont plus d'influence l'un sur l'autre.

Plaque avec une entaille à fond semi-circulaire



$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e \cdot d}$$



FORMULES (d'après [1], [11], [13])

$$K_t = 1,2 \left[\sqrt{\frac{(\alpha_f - 1)^2 (\alpha_t - 1)^2}{(\alpha_f - 1)^2 + (\alpha_t - 1)^2} + 1} \right]$$

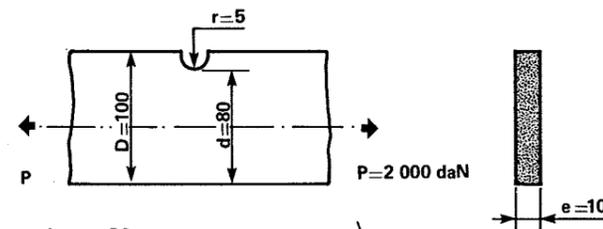
$$\alpha_f = 1 + 2 \sqrt{\frac{t}{r}}; \quad \alpha_t = \frac{\alpha_1 - 2c}{1 - \frac{c}{\Delta}}$$

$$c = \frac{\alpha_1 - \Delta}{\frac{4\Delta}{3\alpha_2} - 1}; \quad \Delta = \sqrt{\frac{d}{r} + 1} = \sqrt{\frac{t}{r} \cdot \frac{d/D}{1 - d/D} + 1}$$

$$\alpha_1 = \frac{2\Delta^2 \sqrt{\Delta^2 - 1}}{\Delta^2 \text{Arctg} \sqrt{\Delta^2 - 1} + \sqrt{\Delta^2 - 1}}$$

$$\alpha_2 = \frac{4(\Delta^2 - 1)^{3/2}}{3[\sqrt{\Delta^2 - 1} + (\Delta^2 - 2) \text{Arctg} \sqrt{\Delta^2 - 1}]}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{D - d} = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$K_t = 3$$

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e \cdot d} = \frac{2000}{10 \times 80} = 2,5 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 3 \times 2,5 = 7,5 \text{ daN/mm}^2$$

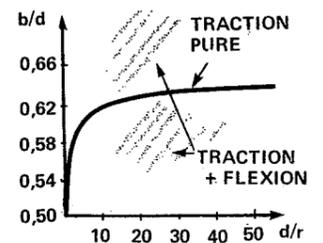
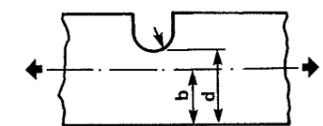
TRACTION

PLAQUE AVEC UNE ENTAILLE A FOND SEMI-CIRCULAIRE

Remarque. — Le graphique donné ci-contre n'est valable que pour le cas de traction pure ce qui suppose une position bien déterminée de l'axe d'application de l'effort. Neuber a calculé cette position en tenant compte des concentrations de contraintes. Elle s'exprime par la formule :

$$\frac{b}{d} = \frac{\sqrt{\frac{d}{r} \left(\frac{d}{r} + 1 \right)}}{\left(\frac{d}{r} + 1 \right) \text{Arctg} \sqrt{\frac{d}{r}} + \sqrt{\frac{d}{r}}}$$

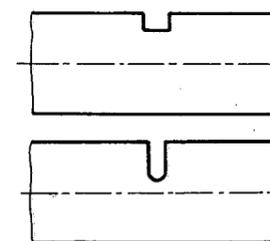
En représentant $\frac{b}{d}$ en fonction de $\frac{d}{r}$ on obtient le graphique ci-dessous :



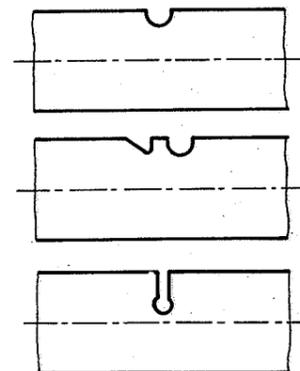
Positionner l'axe de l'effort au milieu de la section nette est donc une approximation. Elle est cependant parfaitement admissible.

CONSEILS PRATIQUES

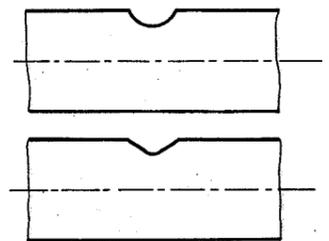
mauvais



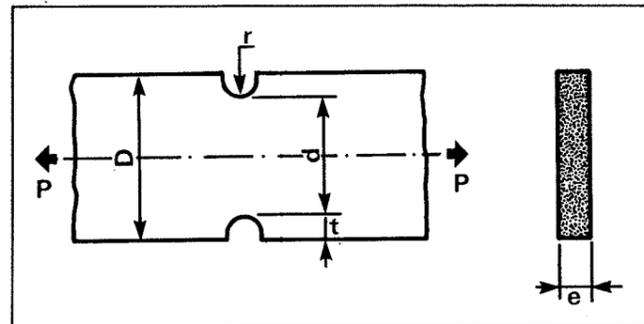
acceptable



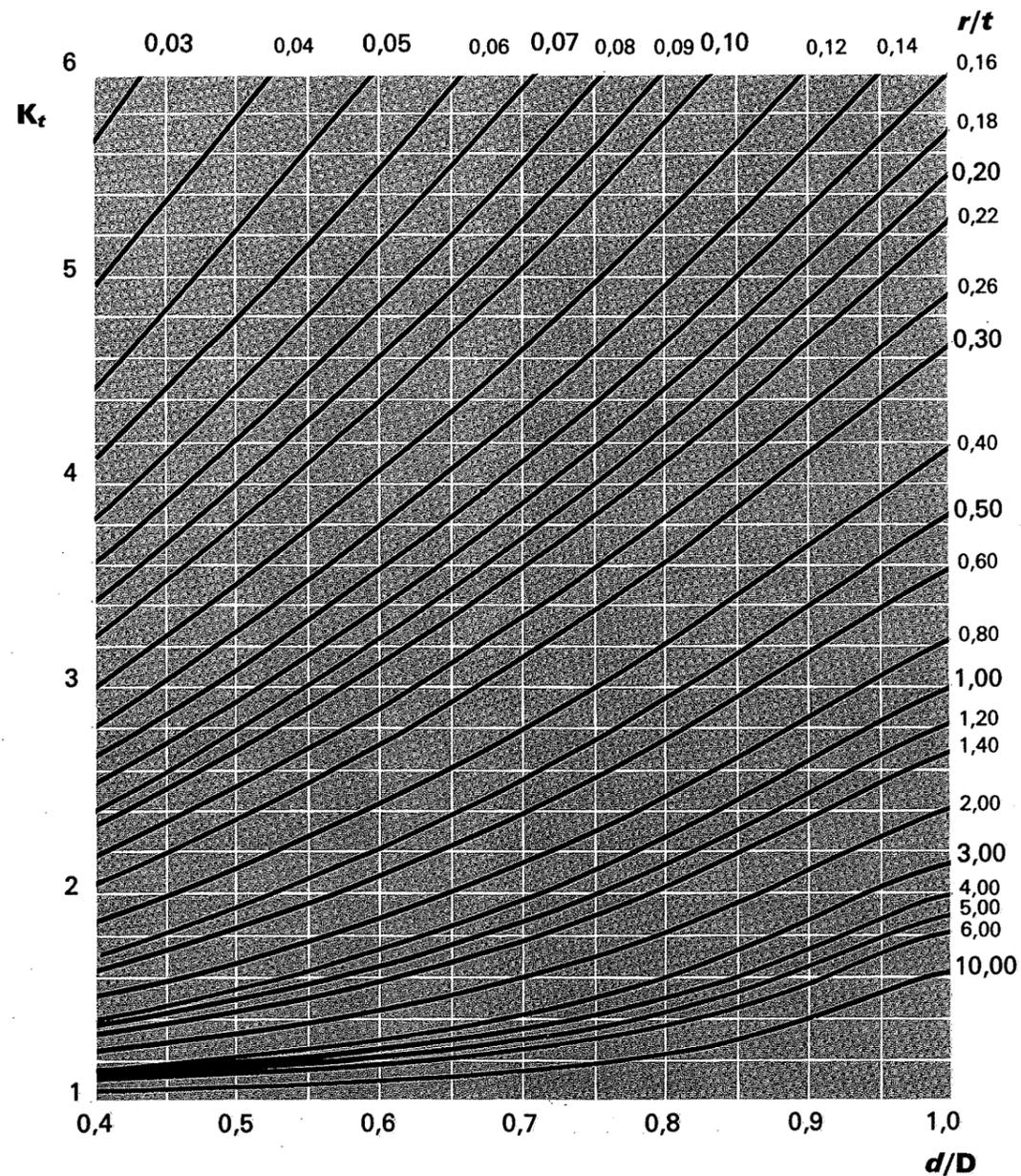
meilleur



Plaque avec deux entailles à fond semi-circulaire



$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e d}$$



TRACTION

PLAQUE AVEC DEUX ENTAILLES
A FOND SEMI-CIRCULAIRE

FORMULES (d'après [1, 3, 6, 8, 9, 10, 12, 24])

$$K_t = \sqrt{\frac{(\alpha_r - 1)^2 (\alpha_t - 1)^2}{(\alpha_r - 1)^2 + (\alpha_t - 1)^2} + 1}$$

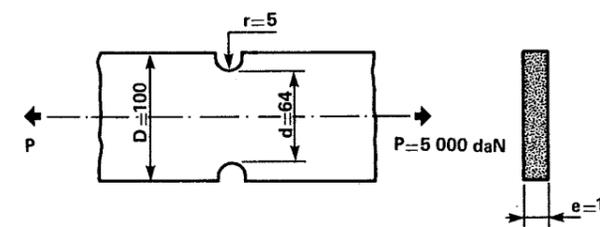
$$\alpha_r = 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{t}}}$$

$$\alpha_t = \frac{2 \Delta^2 \sqrt{\frac{d}{2r}}}{\Delta^2 \text{Arctg} \sqrt{\frac{d}{2r}} + \sqrt{\frac{d}{2r}}}$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{d}{2r} + 1}$$

$$\frac{d}{2r} = \frac{t}{r} \cdot \frac{D}{1 - \frac{d}{D}}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64$$

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{5}{18} = 0,278$$

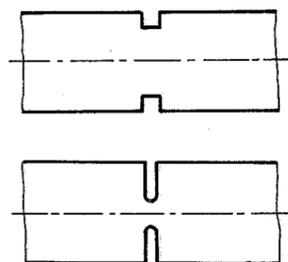
$$K_t = 2,9$$

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{e \cdot d} = \frac{5000}{10 \times 64} \approx 7,8 \text{ daN/mm}^2$$

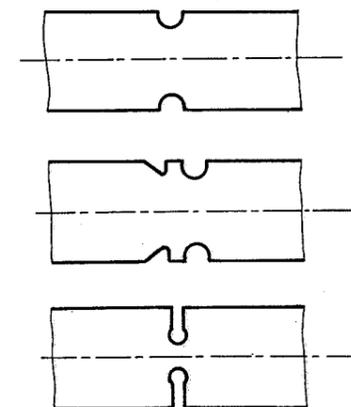
$$\sigma_{réelle} = K_t \times \sigma_{nom} = 2,9 \times 7,8 \approx 22,6 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES

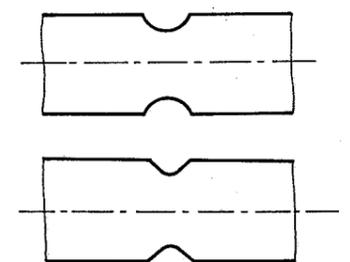
mauvais



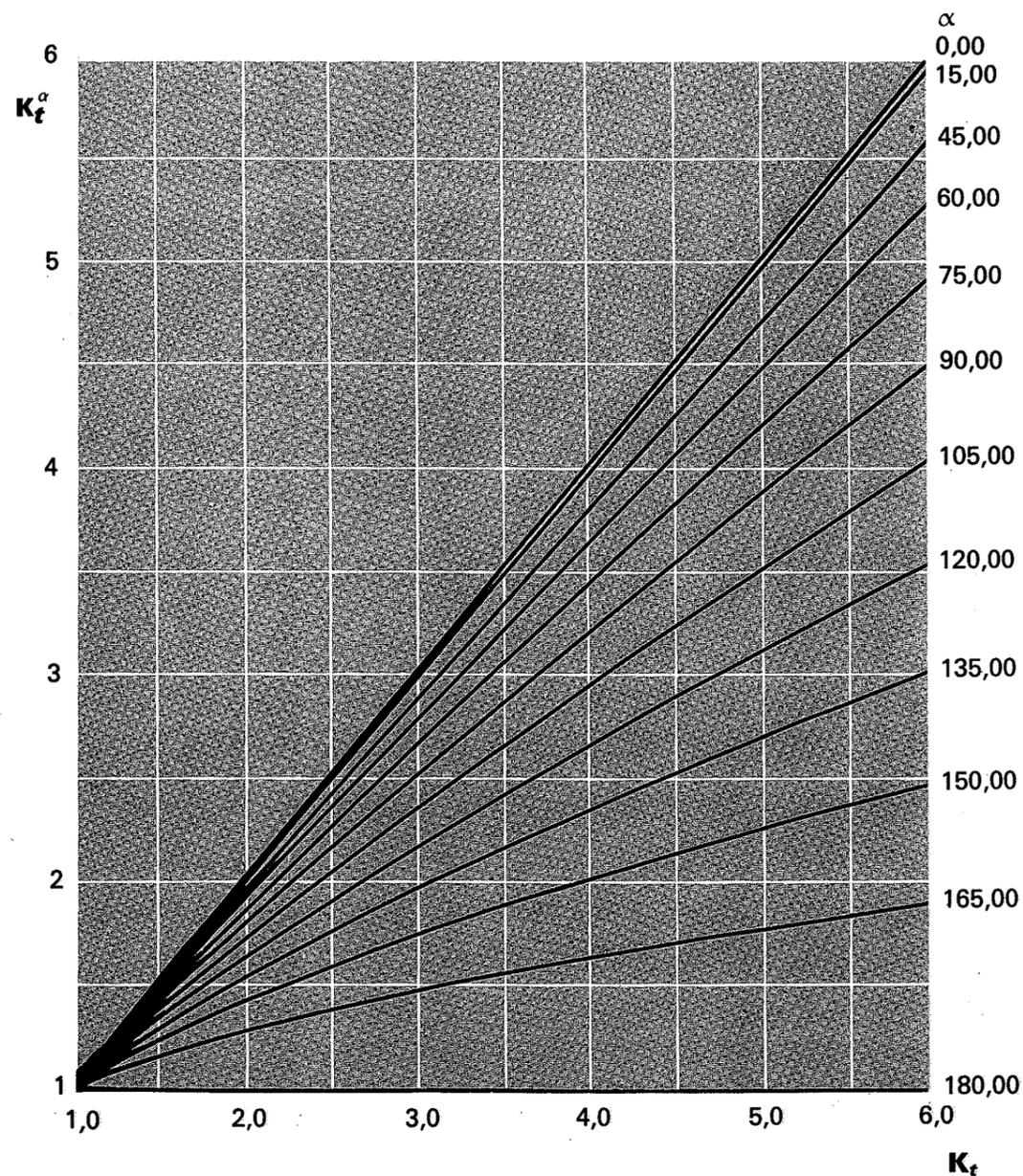
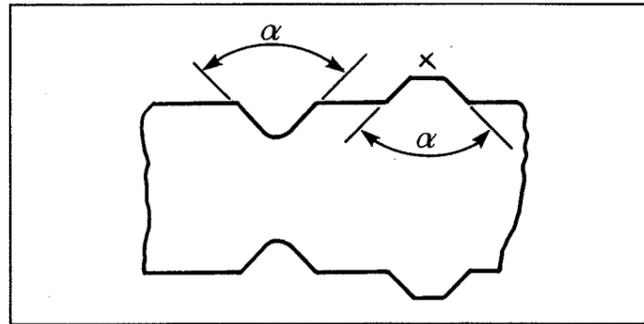
acceptable



meilleur



Epaulements et entailles à bords inclinés



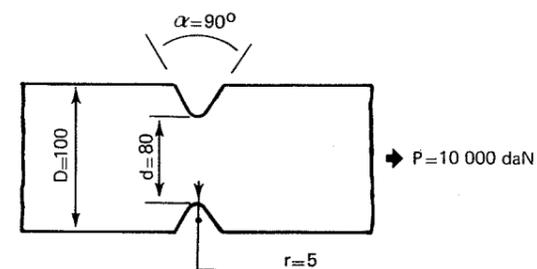
FORMULE :

$$K_t^{(\alpha)} = K_r \left[\sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}} \right]$$

TOUS CAS DE CHARGE

ÉPAULEMENTS ET ENTAILLES A BORDS INCLINÉS

EXEMPLE D'APPLICATION



K_r est déterminé à partir du graphique de la page 24 ARBRE AVEC GORGE A FOND SEMI-CIRCULAIRE, traction.

$$\frac{r}{t} = \frac{r}{\frac{D-d}{2}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\frac{d}{D} = \frac{80}{100} = 0,8$$

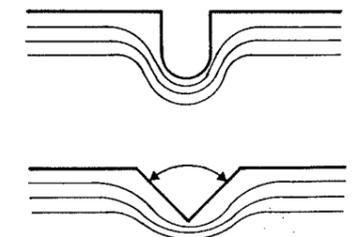
$$K_r = 2,8$$

$$K_t^{(\alpha = 90^\circ)} = 2,38$$

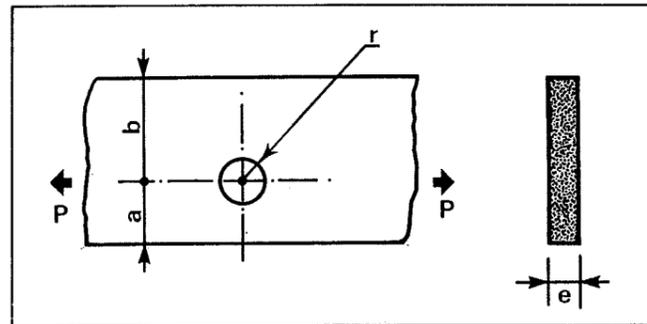
$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 10\,000}{\pi \times 80^2} \approx 2 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{réelle} = K_t^{(\alpha = 90^\circ)} \times \sigma_{nom} = 2,38 \times 2 \approx 4,75 \text{ daN/mm}^2$$

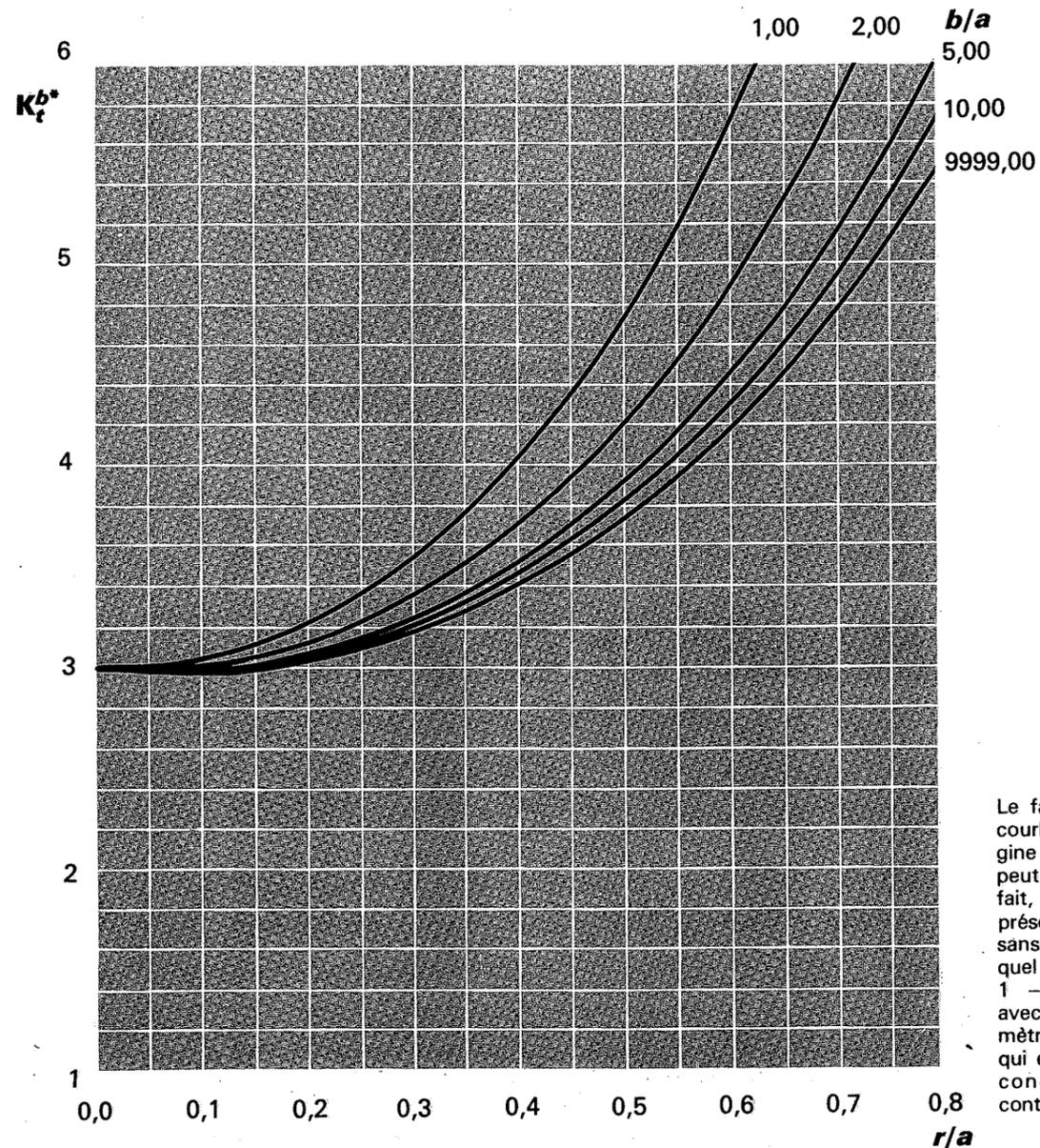
Remarque. — On comprend bien, en utilisant l'analogie de l'écoulement liquide que l'inclinaison des bords d'une gorge ou d'une entaille diminue le coefficient de concentration de contraintes. Cependant pour être efficace, cette inclinaison doit être importante ; entre 0 et 45° elle n'a pratiquement pas d'influence.



Plaque percée d'un seul trou



$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{P}{(a + b)e}$$



Le fait que toutes les courbes aient leur origine au point $K_r^{(b)} = 3$ peut surprendre. En fait, ce point ne représente pas la plaque sans trou — pour lequel K_r est bien égal à 1 — mais la plaque avec un trou de diamètre infiniment petit qui engendre bien des concentrations de contraintes.

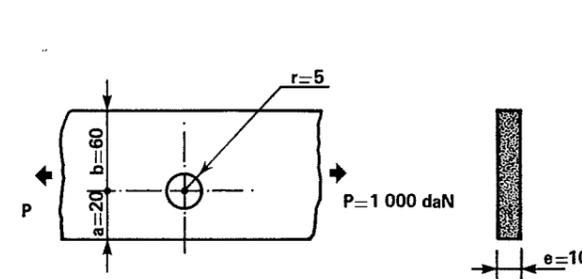
TRACTION

PLAQUE PERCÉE
D'UN SEUL TROU

FORMULE (d'après [1], [3], [9], [24], [33])

$$K_r = \left(\frac{0,00097}{b/a} + 3,04 \right) \left(\frac{r}{a} + 1 \right)^{\left(\frac{0,8093}{b/a} + 1,6215 \right) \left(\frac{r}{a} + 1 \right) - \left(\frac{0,8551}{b/a} + 1,9291 \right)}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{r}{a} = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{b}{a} = \frac{60}{20} = 3$$

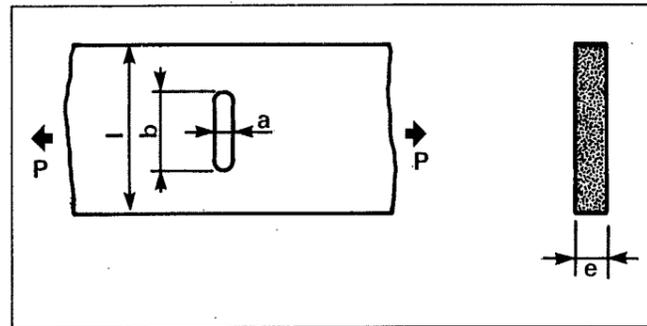
$$K_r^{(b)} = 3,1$$

$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{P}{(a + b)e} = \frac{1\,000}{80 \times 10} = 1,25 \text{ daN/mm}^2$$

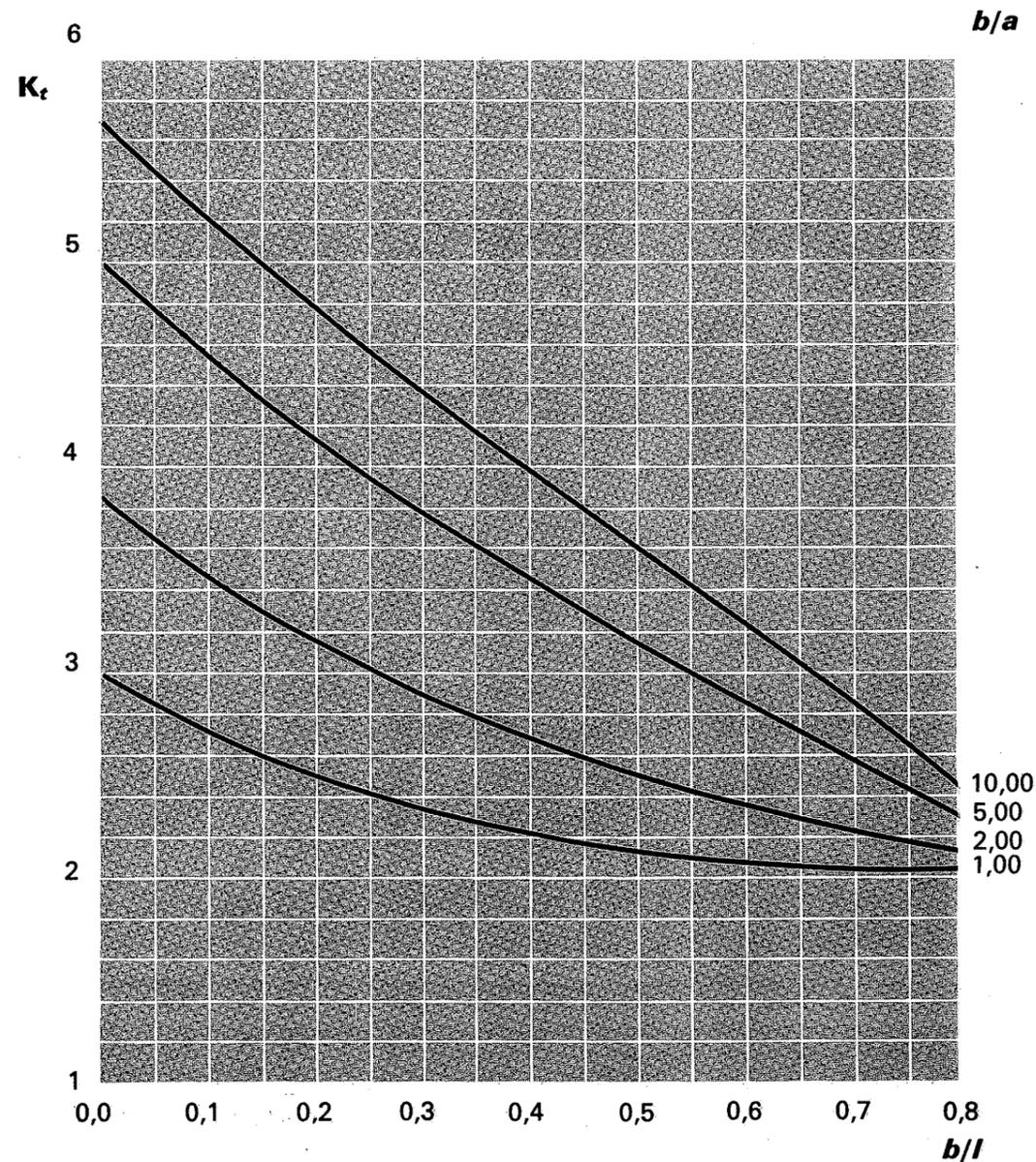
$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r^{(b)} \times \sigma_{\text{nom}}^{(b)} = 3,1 \times 1,25 \simeq 3,9 \text{ daN/mm}^2$$

(*) Notations. — Dans le cas général, le coefficient K_r se rapporte à une contrainte nominale calculée à partir de la plus petite section (plus petite hauteur pour un épaulement, section à fond d'entaille dans le cas d'une entaille, etc.), le cas du trou fait exception. Pour éviter au dessinateur des calculs fastidieux, la contrainte nominale est celle d'une plaque sans trou. Pour ne pas créer de confusion, nous avons appelé $K_r^{(b)}$ (k_r brut) le coefficient qui s'y rapporte.

Plaque avec lumière



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{e(l-b)}$$



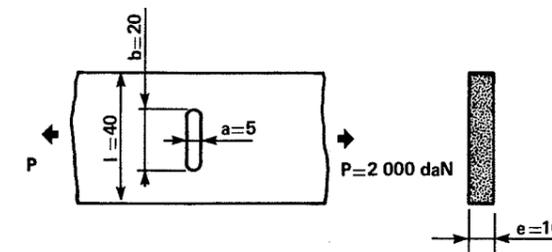
TRACTION

PLAQUE AVEC LUMIÈRE

FORMULE (d'après [3], [30], [32])

$$K_t = \frac{(2b/a + 1) - (2b/a - 1)(b/l)}{[0,3 - 0,08 b/l - 0,14 (b/l)^2] b/a + [0,7 + 0,84 b/l - 0,7 (b/l)^2]}$$

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{b}{l} = \frac{20}{40} = 0,5$$

$$\frac{b}{a} = \frac{20}{5} = 4$$

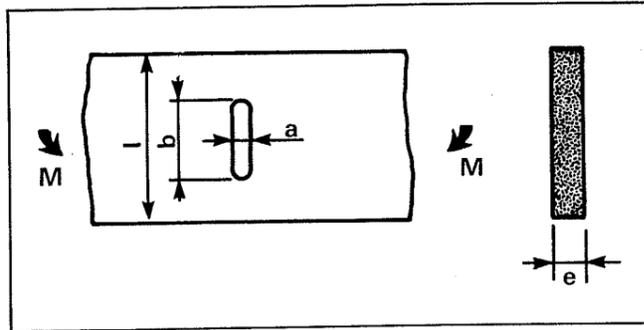
$$K_t = 3,0$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{(l-b)e} = \frac{2000}{20 \times 10} = 10 \text{ daN/mm}^2$$

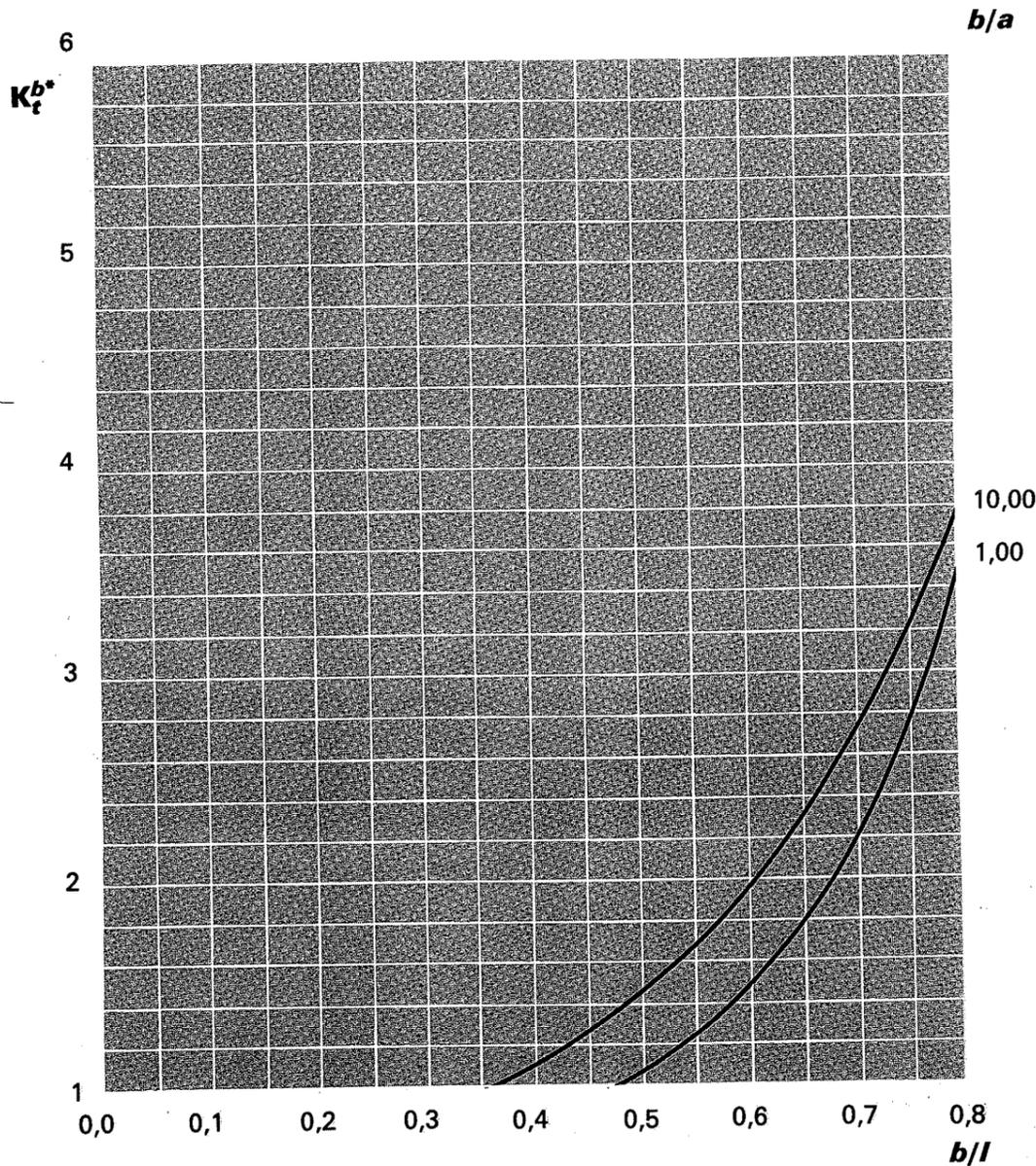
$$\sigma_{\text{réelle}} = K_t \times \sigma_{\text{nom}} = 3 \times 10 = 30 \text{ daN/mm}^2$$

Remarque. — Le cas limite du trou circulaire $b/a = 1$ ne peut pas être comparé au graphique de la page 60 ($b/a = 1$) car les contraintes nominales sont différentes.

Plaque avec lumière



$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{6 M}{e l^2}$$



FLEXION

PLAQUE AVEC LUMIÈRE

FORMULES (d'après [2], [3])

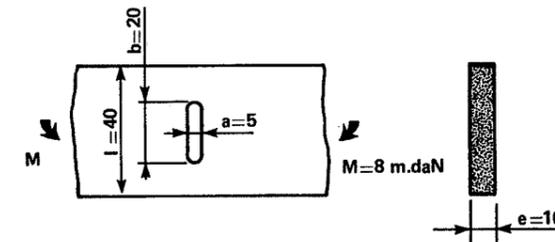
$$K_r^{(b)} = A \left(\frac{b}{l} + 1 \right)^{B \left(\frac{b}{l} + 1 \right) + C}$$

$$A = 0,352 + 1,74 \frac{a}{b} - 0,960 \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

$$C = 0,846 - 24,4 \frac{a}{b} + 13,392 \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

$$B = 1,64 + 11,236 \frac{a}{b} - 6,155 \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

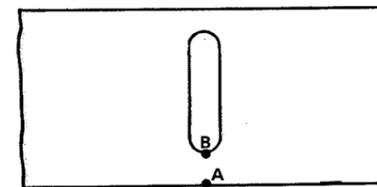
EXEMPLE D'APPLICATION



$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{l} &= \frac{20}{40} = 0,5 \\ \frac{b}{a} &= \frac{20}{5} = 4 \end{aligned} \right\} K_r^{(b)} = 1,4$$

$$\sigma_{\text{nom}}^{(b)} = \frac{6 M}{e \cdot l^2} = \frac{6 \times 800 \times 10^3}{10 \times 40^2} = 3 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r^{(b)} \times \sigma_{\text{nom}}^{(b)} = 1,4 \times 3 = 4,2 \text{ daN/mm}^2$$

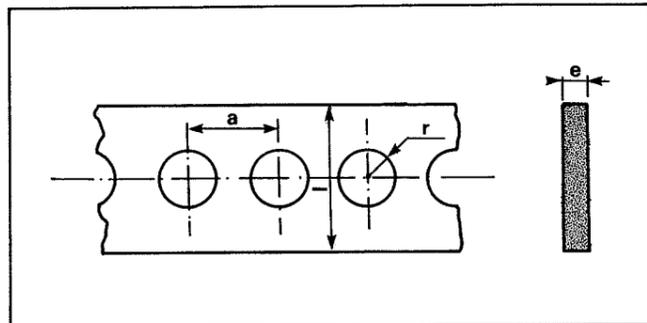


Remarques

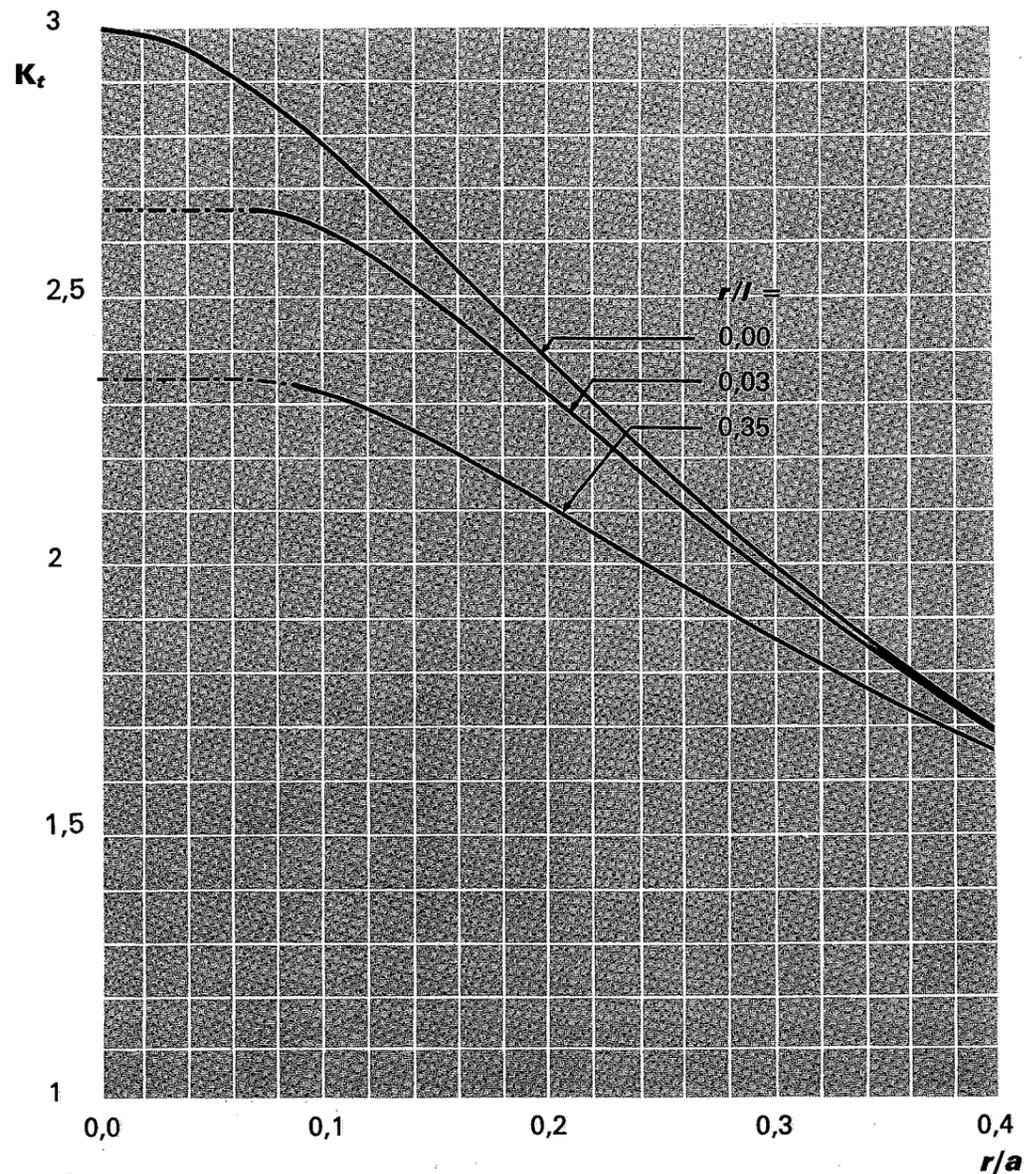
De la valeur $b/l = 0,9$ à la valeur $b/l = 0,4$ environ, la contrainte maximale, compte tenu des concentrations est au point B. La valeur de K_r décroît de 6 à 1. Pour $b/l < 0,4$ environ, la contrainte maximale est en A et le coefficient K_r est égal à 1.

(*) Notations. — Dans le cas général, le coefficient K_r se rapporte à une contrainte nominale calculée à partir de la plus petite section (plus petite hauteur pour un épaulement, section à fond d'entaille dans le cas d'une entaille etc.) ; le cas de la lumière fait exception. Pour éviter au dessinateur des calculs fastidieux, la contrainte nominale est celle d'une plaque sans lumière. Pour ne pas créer de confusion, nous avons appelé $K_r^{(b)}$ (K_r brut) le coefficient qui s'y rapporte.

Plaque percée de plusieurs trous



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{e(l - 2r)}$$



TRACTION

PLAQUE PERCÉE DE PLUSIEURS TROUS

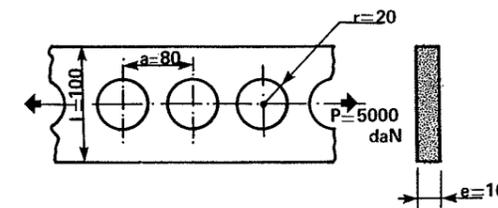
FORMULES (d'après [2])

$$K_t = 1 - \frac{A - B \frac{2r}{a}}{\frac{l}{r} \times \frac{r}{a} + C} + 2 \left(\frac{2r}{a} D + 1 \right) e^{-\frac{2r}{a}}$$

A = 0,955 C = 1,246
B = 1,074 D = 2,8

La formule ci-dessus n'est plus valable pour les parties des courbes apparaissant en tirets.

EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{r}{l} = \frac{20}{100} = 0,2$$

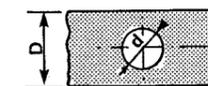
$$\frac{r}{a} = \frac{20}{80} = 0,25$$

$$K_t = 2,0$$

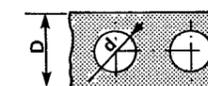
$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{(b - 2r)e} = \frac{5\,000}{60 \times 10} = 8,3 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = K_t \times \sigma_{\text{nom}} = 2,0 \times 8,3 = 16,6 \text{ daN/mm}^2$$

CONSEILS PRATIQUES



moyen



meilleur

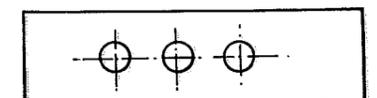


bon

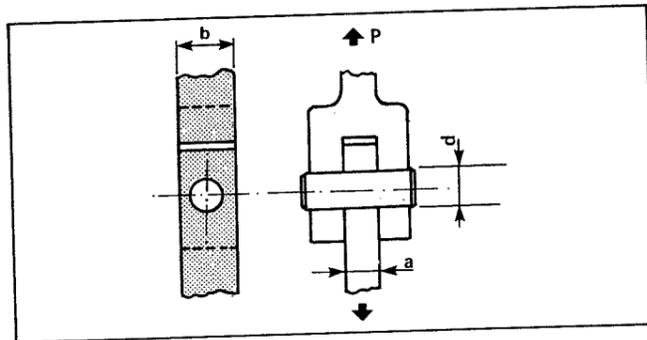
Remarque. — Les coefficients de concentration de contraintes donnés ici supposent que la plaque est de longueur infinie et que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la charge est uniformément répartie sur la largeur l ,
- le trou pour lequel est calculé K_t n'est pas le dernier de la file.

En réalité, la contrainte est maximum autour du dernier trou de la file ; elle est cependant inférieure à ce qu'elle serait dans le cas d'un trou unique.



Chape



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{(b - d) a}$$

FORMULES (d'après [52])

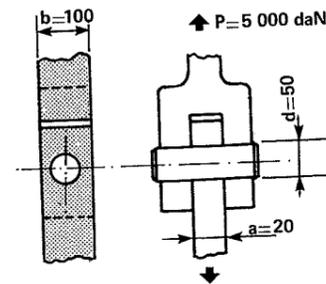
$$K_r = A \left(\frac{d}{b} + 1 \right)^{B \left(\frac{d}{b} + 1 \right) + C}$$

$$A = 12,119$$

$$B = 2,786$$

$$C = -8,010$$

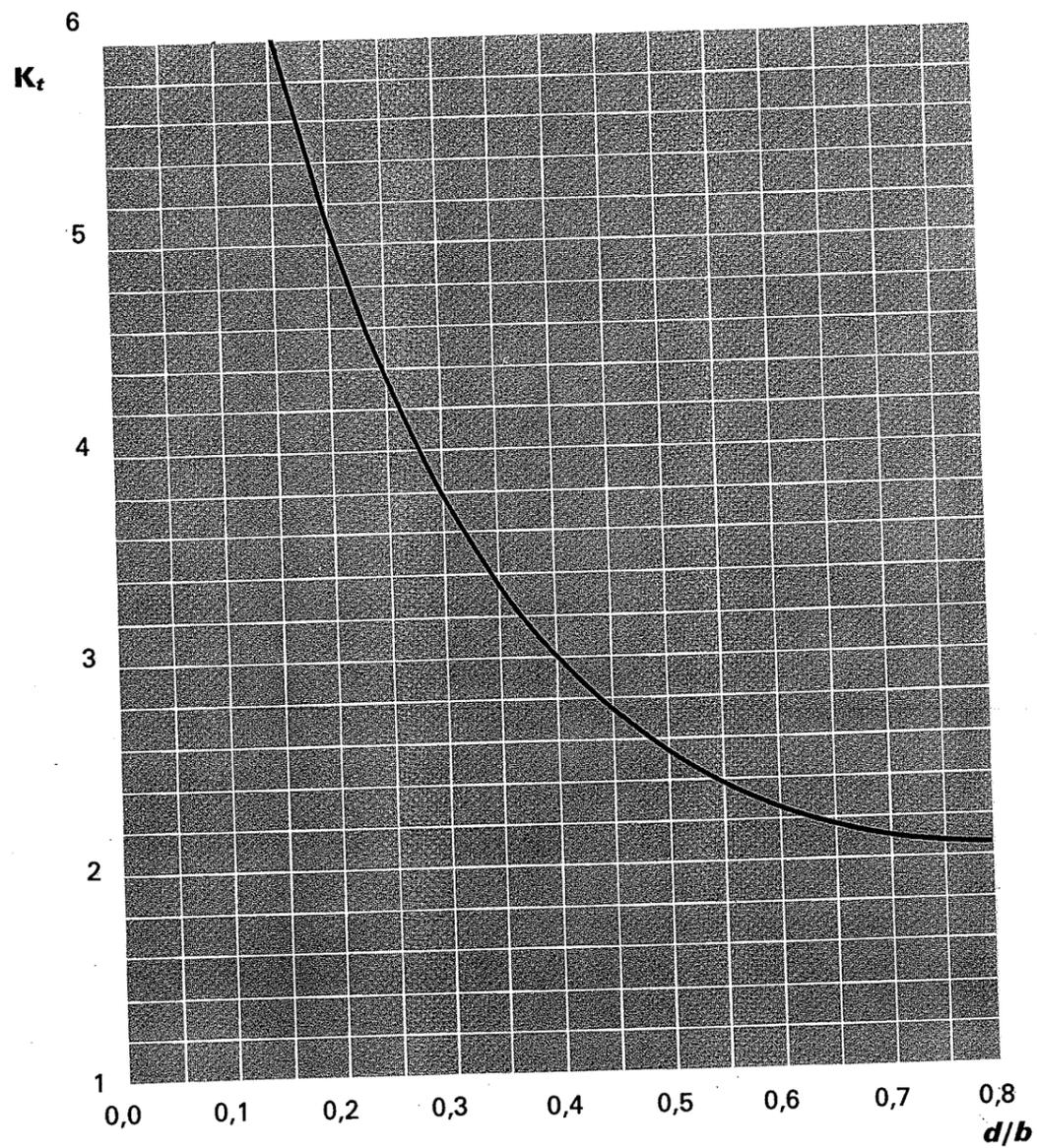
EXEMPLE D'APPLICATION



$$\frac{d}{b} = \frac{50}{100} = 0,5 \Rightarrow K_r = 2,6$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{(b - d) a} = \frac{5000}{50 \times 20} = 5 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{réelle}} = K_r \times \sigma_{\text{nom}} = 2,6 \times 5 = 13 \text{ daN/mm}^2$$



CONSEIL PRATIQUE

La courbe ci-contre représente la contrainte maximale réelle en fonction du rapport b/d . Le meilleur compromis entre le poids de l'ensemble et sa résistance semble se situer vers $\frac{b}{d} = 2,5$.

A small graph showing the relationship between the real stress $\sigma_{\text{réelle}}$ (y-axis) and the ratio b/d (x-axis, ranging from 1 to 6). The curve shows that $\sigma_{\text{réelle}}$ decreases as b/d increases, starting from a high value at $b/d = 1$ and leveling off towards a value of approximately 2,0 at $b/d = 6$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. NEUBER - *Kerbspannungslehre*, Springer, Berlin (1958). Traduction anglaise : *Theory of notch stresses*, Office of Technical Services, Dpt of Commerce, Washington D.C (1961).
- [2] R. E. PETERSON - "Stress Concentration Factors", John Wiley and Sons (1974).
- [3] M. M. FROCHT - "Selected Papers on Photoelasticity", Pergamon 1966.
- [4] LIPSON and JUVINALL - "Handbook of Stress and Strength", Mac Millan 1963.
- [5] E. HOTTENROTT - "Contribution au calcul pratique des facteurs de concentration de contraintes", *La recherche aéronautique*, n° 27 (1952).
- [6] CHIH BING LING - "On Stress Concentration at Semicircular Notch", *Transactions of the ASME*, Vol. 89 - Séries E (1967), Section mécanique appliquée (p. 522).
- [7] CHIH BING LING - "On Stress Concentration Factor in a Notched Strip", *Transactions of the ASME*, Vol. 90, Section mécanique appliquée (1968), (p. 833).
- [8] M. KIKUKAWA - "Factors of Stress Concentrations for Notched Bars under Tension and Bending", *Rapport du 10^e Congrès international de mécanique appliquée*, Elsevier New York (1962), p. 337.
- [9] P. D. FLYNN et A. A. ROLL - "Re-Examination of Stresses in a Tension bar with Symmetrical u-shaped Grooves", *Exp. Stress Analysis*, Vol. 23 (1966), p. 93.
- [10] P. D. FLYNN et A. A. ROLL - "A Comparison of Stress Concentration Factors in Hyperbolic and u-shaped Grooves", *Exp. Stress Analysis*, Vol. 24 (1967), p. 272.
- [11] I. H. WILSON et D. J. WHITE - "Stress Concentration Factors for Shoulder Fillets and Grooves in Plates", *J. Strain Analysis*, Vol. 8 (1973), p. 43.
- [12] H. LIEBOWITZ, H. VANDERVELDT et R. J. SANFORD : "Stress Concentrations due to Sharp Notches", *Exper. Mech.*, Vol. 7 (1967), P. 513.
- [13] A. G. COLE et A. F. BROWN - "Photoelastic Determination of Stress Concentration Factors Caused by a Single u-notch on one side of a Plate in Tension", *Journal of Royal Aeronautical Society*, Vol. 62 (1958), p. 597.
- [14] A. ATSUMI - "Stress Concentrations in a Strip under Tension and Containing an Infinite row of Semicircular Notches", *Quart. Journal Mech. and Applied Math.*, Vol. 11, Part. 4 (1958), p. 478.
- [15] H. KITAGAWA et K. NAKADE - "Stress Concentrations in Notched Strip Subjected to in Plane Bending", *Technology reports of OSAKA University*, Vol. 20 (1970), p. 751.
- [16] G. H. LEE - "The Influence of Hyperbolic Notches on the Transverse Flexure of Elastic Plates", *Transactions of the ASME*, Vol. 62 (1940), p. A 53.
- [17] S. SHIOYA - "On the Transverse Flexure of a Semi-Infinite Plate with an Elliptic Notch", *Ingénieur Archiv*, Vol. 29 (1960), p. 93.
- [18] M. M. LEVEN - "Quantitative three Dimensional Photoelasticity", *Proc. SESA*, Vol. 12, N° 2 (1955), p. 157.
- [19] M. FESSLER, C. C. ROGERS et P. STANLEY - "Shouldered Plates and Shafts in Tension and Torsion", *Journal of strain analysis*, Vol. 4, N° 3 (1969), p. 169.
- [20] J. B. HARTMAN et M. M. LEVEN - "Factors of Stress Concentration for the Bending Case of Fillets in Flat Bars and Shafts with Central Enlarged Section", *Proceedings SESA*, Vol. 9 (1951), p. 53.
- [21] K. KUMAGAI et H. SHIMADA - "The Stress Concentration Factor Produced by a Projection under Tensile Load", *Bulletin of the JSME*, Vol. 11, N° 47 (1968), p. 739.
- [22] I. M. ALLISON - "The Elastic Stress Concentration Factors in Shouldered Shafts", *Aeronautical Quarterly*, Vol. 12 (1961), p. 189.
- [23] K. R. RUSHTON - "Elastic Stress Concentrations for the Torsion of Hollow Shouldered Shafts Determined by an Electrical Analogue", *Aeronautical Quarterly*, Vol. 15 (1964), p. 83.
- [24] A. M. WAHL et R. BEEUWKES - "Stress Concentration Produced by Holes and Notches", *Transactions of the ASME*, Vol. 56 (1934), p. 617.
- [25] P. VAN DYKE - "Stresses about a circular Hole in a Cylindrical Shell", *A.I.A.A. Journal*, Vol. 3, N° 9 (1965), p. 1733.
- [26] H. T. JESSOP, G. SNELL et I. M. ALLISON - "The Stress Concentration Factors in Cylindrical Tubes with Transverse Circular Holes", *Aeronautical Quarterly*, Vol. 10 (1959), p. 326.
- [27] M. SEIKA et A. AMANO - "The Maximum Stress in a wide Plate with a reinforced Circular Hole under Uniaxial Tension effects of a Boss with Fillet", *Transactions of the ASME*, Vol. 89 - Séries E (1967), Section mécanique appliquée, p. 232.
- [28] M. SEIKA et M. ISHII - "Photoelastic Investigation of the Maximum Stress in a Plate with a Reinforced Circular Hole under Uniaxial Tension", *Transactions of the ASME*, Vol. 86, Séries E (1964), Section mécanique appliquée, p. 701.
- [29] K. LINGAIAH, W. P. T. NORTH and J. B. MANTLE - "Photoelastic Analysis of an Asymmetrically Reinforced Circular cut-out in a Flat Plate Subjected to Uniform Unidirectional Stress", *Proc. SESA*, Vol. 23, N° 2 (1966), p. 617.
- [30] M. JONES et D. HOZOS - "A Study of the Stresses Around Elliptical Holes in Flat Plates", *Transactions of the ASME* - Vol. 93, Séries B, (1971), N° 2, p. 688.
- [31] A. J. DURELLI, V. J. PARKS et S. URIBE - "Optimization of a Slot End Configuration in a Finite Plate Subjected to Uniformly Distributed Load", *Transactions of the ASME*, Vol. 90, Séries E (1968), Section mécanique appliquée, p. 403.
- [32] A. J. DURELLI, V. J. PARKS et H. C. FENG - "Stresses Around an Elliptical Hole in a Finite Plate Subjected to Axial Loading", *Transactions of the ASME*, Vol. 88, Séries E (1966), Section mécanique appliquée, p. 192.
- [33] J. J. RYAN et L. J. FISCHER - "Photoelastic Analysis of Stress Concentration for Beams in Pure Bending with a Central Hole", *Journal of the Franklin Institut*, Vol. 225, N° 5 (mai 1938), p. 513.
- [34] J. N. GOODIER et G. H. LEE - "An Extension of the Photoelastic Method of Stress Measurement to Plates in Transverse Bending", *Transactions of the ASME*, Vol. 63 (1941), Section mécanique appliquée, p. A-27.
- [35] M. HETENYI - "The Application of Hardening Resins in three-dimensional Photoelasticity Studies", *Journal of applied physics*, Vol. 10 (1939), p. 295.
- [36] H. FESSLER, C. C. ROGERS et P. STANLEY - "Stresses at end Milled Keyways in Plain Shafts Subjected to Tension, Bending and Torsion", *Journal of strain analysis*, Vol. 4, N° 3 (1969), p. 180.
- [37] H. HOKUBO - "On the Torsion of a Shaft with Keyways", *Quart. Journ. Mech. and applied math.*, Vol. 3, part. 2 (1950), p. 162.
- [38] A. G. SOLOKIAN et G. B. KARELITZ - "Photoelastic Study of Shearing Stresses in Keys and Keyways", *Transactions of the ASME*, Vol. 54 (1932), Section mécanique appliquée, p. 97.
- [39] W. H. GIBSON et P. M. GILET - "Transmission of Torque by Keys and Keyways", *Journal of Engineers Australia*, Vol. 10 (1938), p. 393.
- [40] H. OKUBO, H. HOSONO et K. SAKAKI - "The Stress Concentration in Keyways when Torque is Transmitted Through Keys", *Experimental mechanics*, Vol. 8 (1968), p. 375.
- [41] H. FESSLER, C. C. ROGERS et P. STANLEY - "Stresses at Keyway Ends Near Shoulders", *Journal of strain analysis*, Vol. 4 (1969), p. 267.
- [42] M. HETENYI - "Some Applications of Photoelasticity in Turbine Generator Design", *Transactions of the ASME*, Vol. 61 (1939), Section mécanique appliquée, p. A 151.
- [43] J. B. MANTLE et T. J. DOLAN - "A Photoelastic Study of Stresses in U. Shaped Members", *Proceedings SESA*, Vol. 6, N° 1 (1948), p. 66.
- [44] H. G. RYLANDER, P. M. A. DAROCHA, L. F. KREISLE et G. J. VAUGHN - "Stress Concentration Factors in Shouldered Shafts Subjected to Combinations of Flexure and Torsion", *Transactions of the ASME*, Vol. 90 - Séries B, N° 2 (1968), p. 301.
- [45] L. S. JACOBSEN - "Torsional Stress Concentrations in Shafts of Circular Cross Section and Variable Diameter", *Transactions of the ASME*, Vol. 47 (1925), p. 619.
- [46] G. J. MATTHEWS et C. J. HOOKE - "Solution of Axisymmetric Torsion Problems by point Matching", *Journal of strain analysis*, Vol. 6, N° 2 (1971), p. 124.
- [47] L. E. TUCKER - "A Procedure for Designing Against Fatigue Failure of Notched Parts", *Automotive Engineering Congress*, DETROIT (1972), p. 1.
- [48] F. J. APPL - "On Stress Concentration Factor in a Notched Strip", *Transactions of the A.S.M.E.*, Vol. 91, Séries E, n° 3 (1969), p. 654.
- [49] F. J. APPL et D. R. KOERNER - "Numerical Analysis of Plane Elasticity Problems", *Journal of the engineering mechanics division proceedings of the american society of civil engineers* (1968), p. 743.
- [50] H. T. JESSOP, C. SNELL et G. S. HOLISTER - "Photoelastic Investigation on Plates with Single Interference fit Pins with load Applied to Pin only and to Pin and Plate Simultaneously", *Aeronautical Quart.* (mai 1958), p. 147.
- [51] D. SPANGENBERG - "Die Spannungen in Ebenen Rechtwinkligen Knotenpunkten aus Flachstaben in Abhängigkeit von der Form", *Konstruktion*, Vol. 12 - 1960 - p. 278.
- [52] Y. WEITSMAN - "On Stress Concentrations Around Cylindrical Cavities in Laminated Media", *Acta mechanica*, vol. 24 (1976), p. 37.
- [53] H. NISITANI - "Method of Approximate Calculation for Interference of Notch Effects and its Application", *Bulletin of JSME*, Vol. 11, N° 47 (1968), p. 725.
- [54] G. H. NEUGEBAUER - "Stress Concentration Factors and their Effects on Design" - *Product engineering*, vol. 14 (1943), p. 82.
- [55] A. THUM et W. KIRMSE - "Überlagerte Wechselbeanspruchungen", *V.D.I. Forschungshett.* n° 419 (1943), p. 1.
- [56] E. FICKER et ST JECIC - "Beitrag zur Darstellung von Formzahlen", *V.D.I. Berichte*, n° 271, p. 47.
- [57] D. KECECIOGLU, L. B. CHESTER et T. M. DODGE - "Combined Bending Torsion Fatigue Reliability of Aisi 4340 Steel Shafting with $K_t = 2,34$ ", *Transactions of the ASME*, p. 748 (1975).
- [58] H. OKUBO et A. KATO - "Stress Concentration Factors of Shallow Grooves in Torsion", *Journal of strain analysis*, Vol. 12, N° 1 (1977), p. 41.
- [59] H. GOLLE - "Dauer Festigkeitsprobleme bei Antrieb Selementen der Fordertechnik", *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto Van Guericke Magdeburg* 20 (1976), p. 23.
- [60] M. E. GRAYLEY - "Stress Concentration Factors for Shouldered Shafts in Torsion", *Engineering sciences data unit* (Sept. 1975), p. 1.
- [61] K. H. SPIES - "Druckaufbau im Statisch Belasteten Gleitlager Experimentelle Untersuchung", Universität de Karlsruhe (fév. 1975), p. 1.
- [62] V. LINHART - "Accroissement de l'endurance à la fatigue des arbres à épaulement comportant un congé de faible rayon", *Strojirenstoj*, Vol. 26, N° 2 (1976).
- [63] A. M. FREUDENTHAL - "New Aspects of Fatigue and Fracture Mechanics", *Engineering fracture mechanics*, Vol. 6 (1974), p. 775.
- [64] C. PETERSEN - "Die Praktische Bestimmung von Formzahlen Gekerbter Stäbe", Vol. 17, N° 1, P. 16.